∽ Brevet Limoges juin 1976 ∾

Algèbre

On considère la fonction polynôme f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f : x \longmapsto f(x) = \left(\frac{7}{3}x - 4\right)(6x+3) - 4x - 2.$$

1. Développer, réduire et ordonner $f(x)$.
2. Mettre $f(x)$ sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré.
3. Soit la fonction rationnelle h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$h : x \longmapsto h(x) = \frac{14x^2 - 21x - 14}{(2x+1)(14x-21)}.$$

   a. Déterminer l'ensemble de définition (ou existentiel] de h.

   b. Simplifier $h(x)$. On obtient $h'(x)$.

   c. Calculer $h'(0)$; $h'\left(-\frac{1}{2}\right)$, $h'\left(\sqrt{2}\right)$ et rendre le dénominateur rationnel.

4. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ tracer les représentations graphiques des fonctions affines f_1 et f_2 définies par :

$$f_1 \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ x & \longmapsto & f_1(x) = x - 2 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad f_1 \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ x & \longmapsto & f_2(x) = 2x - 3 \end{array} \right.$$

5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

$$f_1(x) = 0 \quad ; \quad f_2(x) = 0 \quad ; \quad f_1(x) = f_2(x).$$

   Retrouver graphiquement les résultats obtenus.

Géométrie

Dans un plan euclidien muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère quatre points A, B, C, D définis par

$$\begin{array}{lll} \overrightarrow{\text{OA}} & = & 3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}, \\ \overrightarrow{\text{OC}} & = & \vec{\imath} - \vec{\jmath} \end{array} \quad \begin{array}{lll} \overrightarrow{\text{OB}} & = & -2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} \\ \overrightarrow{\text{OD}} & = & -4\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} \end{array}$$

1. Calculer les composantes (ou coordonnées) des vecteurs $\overrightarrow{\text{BA}}$ et $\overrightarrow{\text{CD}}$.
2. Calculer $d(\text{A, B})$ et $d(\text{A, D})$.
   Déduire des résultats précédents la nature du quadruplet (A, B, C, D).
   Que peut-on dire des droites (AC) et (BD) ?
3. Soit Ω le point dont les coordonnées sont $\left(-\frac{8}{7} ; -\frac{1}{7}\right)$.

   a. Montrer que C, Ω et A sont alignés.

b. Montrer que le triangle (ΩBA) est rectangle en B.

4. On considère la symétrie orthogonale par rapport à la droite (ΩA).
Quelles sont les images des points A, B et Ω ?
En déduire la nature du triangle $(A\Omega D)$.

5. Montrer que le cercle de centre Ω et de rayon $[\Omega B]$ est tangent à la droite (AD) en D.

6. Calculer $\tan\alpha$, α étant l'écart angulaire de l'angle géométrique $\widehat{\Omega AB}$ (unité : degré).
À l'aide du résultat précédent et de tables trigonométriques trouver la valeur approchée à un degré près par défaut de α.