Brevet Lyon septembre 1976

I

f et g sont les applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

où a, b et c sont des réels,

$$g(x) = 2x - 5.$$

Partie A

1. Déterminer les réels a, b et c pour que, quel que soit x élément de $\mathbb{R}$,

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 2x^2 - 3x - 5.$$

2. Factoriser $f(x)$.
   En déduire que $(f+g)(x)$ se factorise sous la forme $(x+1)(2x-5)$.

Partie B

1. Soit h la fonction rationnelle

$$h \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & h(x) = \dfrac{4x^2 - 20x + 25}{(f+g)(x)}. \end{array} \right.$$

   a. Déterminer l'ensemble de définition E de la fonction h.

   b. Factoriser $4x^2 - 20x + 25$.

   c. En déduire une simplification de $h(x)$ et calculer $h(-3)$ et $h\left(\sqrt{3}\right)$ et $h\left(\sqrt{3}\right)$.
   Rendre rationnel le dénominateur de $h\left(\sqrt{3}\right)$.

   d. Sachant que $1,73 < \sqrt{3} < 1,74$, donner l'approximation décimale d'ordre 1 par défaut (ou valeur approchée à $0,1$ près par défaut) de $h\left(\sqrt{3}\right)$.

2. On considère la fonction k

$$h \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & k(x) = \sqrt{4x^2 - 20x + 25}. \end{array} \right.$$

   a. Calculer $k(1)$ et $k(4)$.

   b. Mettre $k(x)$ sous une forme ne comportant pas le symbole radical.

   c. Construire dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ la représentation graphique de la fonction k (k est une fonction affine par morceaux).

N. B. - Seul le résultat de la factorisation de $(f+g)(x)$ (voir question A), 2. (est nécessaire pour faire les questions de la partie B).

II

Dans le plan (P) muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on place les points

$$\text{A}(-1\,;\,2),\quad \text{B}(3\,;\,-1)\quad \text{et}\quad \text{M}(1\,;\,-2).$$

1. Démontrer que les points A, 0 et M sont alignés,

2. **a.** Déterminer les coordonnées du point C tel que M soit le milieu du couple (A, C).

b. Déterminer les coordonnées du point D tel que M soit le milieu du couple (B, D).

3. Démontrer que le quadruplet (A, B, C, D) est un losange.

4. **a.** On mène par B la parallèle (Δ) à la droite (AM). Donner une équation de la droite (Δ).

b. Cette droite (Δ) coupe l'axe des abscisses en E. Déterminer par le calcul les coordonnées de E.

5. Soit a l'écart angulaire de l'angle géométrique $\widehat{\text{BAM}}$.

Calculer $\sin a$.