

Maroc juin 1980

ALGÈBRE

On considère les applications f et g de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telles que

$$\begin{aligned}f(x) &= (x+3)^2 - (2x-7)^2, \\g(x) &= (2x-3)(2x-1) - (3-2x)(x-3).\end{aligned}$$

1. Mettre $f(x)$ et $g(x)$ sous forme de produits de facteurs.
2. Déterminer les éléments des ensemble

$$\begin{aligned}A &= \{x/x \in \mathbb{Z}, f(x) = 0\}, \\B &= \{x/x \in \mathbb{R}, g(x) = 0\}.\end{aligned}$$

3. On considère la fonction p ainsi définie

$$\begin{aligned}p: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\x &\mapsto p(x) = \frac{f(x)}{g(x)}\end{aligned}$$

p est-elle une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ?

Quel est son ensemble de définition E ?

Simplifier $p(x)$. Résoudre dans \mathbb{R} ,

$$p(x) = 0, \quad p(x) = 1.$$

4. Résoudre graphiquement le système d'équations

$$\begin{cases} 3y + 3x - 30 = 0, \\ 2y - 4x + 6 = 0. \end{cases}$$

5. Soit les ensembles

$$\begin{aligned}E &= \{x/x \in \mathbb{Z}, 10 - x > 0\}, \\G &= \{x/x \in \mathbb{Z}, 2x - 3 > 0\}\end{aligned}$$

Donner $E \cap G$ en extension.

Que peut-on dire de $p(x)$ quand $x \in E \cap G$?

GÉOMÉTRIE

Dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère les points A, B et C définis par leurs coordonnées

$$A(2; -1), \quad B(6; 4), \quad C(-2; -6).$$

1.
 - a. Exprimer les vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{BC} en fonction des vecteurs \vec{i} et \vec{j} .
 - b. Démontrer que les points A, B et C sont alignés.

2. Déterminer les coordonnées du milieu M du bipoint (B, C) . Que constatez-vous?
Déterminer les coordonnées du point D symétrique de O par rapport à M .
Quelle est la nature du quadruplet (B, D, C, O) ? Justifier.
3. Soit I la projection orthogonale de O sur CD .
Trouver l'équation de la droite (OI) .
Déterminer les coordonnées du point I .
4. Déterminer le centre E du cercle \mathcal{C} passant par les points O, I et C .
Déterminer son rayon R .
Trouver l'équation de la tangente en O au cercle \mathcal{C} .