

œ Brevet Montréal et New York juin 1978 œ

Exercice 1

1. Développer et réduire le polynôme $f(x)$ défini par

$$f(x) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) - (x - \sqrt{2})^2 + x(x - 2\sqrt{2}).$$

2. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $f(x) = 0$.
3. Soit q la fonction rationnelle définie dans \mathbb{R} par

$$q(x) = \frac{x^2 - 4}{x(x - \sqrt{2})}.$$

- a. Déterminer l'ensemble de définition \mathcal{D}_q de q .
b. Résoudre, dans \mathcal{D}_q , l'équation $q(x) = 1$.
c. Calculer $q(1 + \sqrt{2})$ et écrire le résultat sous la forme $a + b\sqrt{2}$, avec $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
Sachant que $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$, calculer la valeur approchée par défaut à 10^{-2} près de $q(1 + \sqrt{2})$.

Exercice 2

1. On considère la fonction polynôme f ainsi définie

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto (3 - 2x)(7x + 1) - (9 - 4x^2) + (3 - 2x)^2. \end{aligned}$$

Écrire f sous la forme d'un produit de fonctions polynômes de degré 1.

2. Calculer les images par f des réels $\frac{3}{2}$; $-1, 3$; $-\frac{1}{3}$.
L'application f est-elle une bijection sur \mathbb{R} ?
Pourquoi?

Exercice 3

1. Dans un plan euclidien rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) placer les points A, B et C définis par

$$\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + 11\vec{j}, \quad \overrightarrow{OB} = -7\vec{i} + \vec{j} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OC} = 5\vec{i} + 5\vec{j}$$

(on prendra comme unité de longueur 0,5 cm).

2. Calculer les coordonnées du milieu, I, du segment [AB].
3. a. Montrer que le triangle (A, B, C) est un triangle rectangle.
b. En déduire que les points A, B et C appartiennent à un cercle (\mathcal{C}), dont on déterminera le centre et le rayon.

4. Montrer que (O, B, I, C) est un losange.
5. Soit (Δ) et (Δ') les droites d'équations respectives

$$(\Delta) \quad x + y + 6 = 0, \quad (\Delta') \quad 7x - y - 30 = 0.$$

- a. Montrer que B est un élément de (Δ) et que C est un élément de (Δ') .
 - b. Calculer les coordonnées du point J intersection de (Δ) et (Δ') .
Tracer J, (Δ) et (Δ') sur la figure.
6. Montrer que les droites (BJ) et (BI) sont perpendiculaires ainsi que les droites (CI) et (CJ).
Que représentent les droites (Δ) et (Δ') pour le cercle (\mathcal{C}) ?