

œ Brevet Montréal et New York juin 1978 œ

Exercice 1

1. Développer et réduire le polynôme $f(x)$ défini par

$$f(x) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) - (x - \sqrt{2})^2 + x(x - 2\sqrt{2}).$$

2. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $f(x) = 0$.
3. Soit q la fonction rationnelle définie dans \mathbb{R} par

$$q(x) = \frac{x^2 - 4}{x(x - \sqrt{2})}.$$

- a. Déterminer l'ensemble de définition \mathcal{D}_q de q .
b. Résoudre, dans \mathcal{D}_q , l'équation $q(x) = 1$.
c. Calculer $q(1 + \sqrt{2})$ et écrire le résultat sous la forme $a + b\sqrt{2}$, avec $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
Sachant que $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$, calculer la valeur approchée par défaut à 10^{-2} près de $q(1 + \sqrt{2})$.

Exercice 2

1. On considère la fonction polynôme f ainsi définie

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto (3 - 2x)(7x + 1) - (9 - 4x^2) + (3 - 2x)^2. \end{aligned}$$

Écrire f sous la forme d'un produit de fonctions polynômes de degré 1.

2. Calculer les images par f des réels $\frac{3}{2}$; $-1, 3$; $-\frac{1}{3}$.
L'application f est-elle une bijection sur \mathbb{R} ?
Pourquoi?

Exercice 3

1. Dans un plan euclidien rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) placer les points A, B et C définis par

$$\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + 11\vec{j}, \quad \overrightarrow{OB} = -7\vec{i} + \vec{j} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OC} = 5\vec{i} + 5\vec{j}$$

(on prendra comme unité de longueur 0,5 cm).

2. Calculer les coordonnées du milieu, I, du segment [AB].
3. a. Montrer que le triangle (A, B, C) est un triangle rectangle.
b. En déduire que les points A, B et C appartiennent à un cercle (\mathcal{C}), dont on déterminera le centre et le rayon.

4. Montrer que (O, B, I, C) est un losange.
5. Soit (Δ) et (Δ') les droites d'équations respectives

$$(\Delta) \quad x + y + 6 = 0, \quad (\Delta') \quad 7x - y - 30 = 0.$$

- a. Montrer que B est un élément de (Δ) et que C est un élément de (Δ') .
- b. Calculer les coordonnées du point J intersection de (Δ) et (Δ') .
Tracer J, (Δ) et (Δ') sur la figure.
6. Montrer que les droites (BJ) et (BI) sont perpendiculaires ainsi que les droites (CI) et (CJ) .
Que représentent les droites (Δ) et (Δ') pour le cercle (\mathcal{C}) ?