∽ Brevet des collèges Montpellier juin 1973 ∾

Algèbre

On considère les fonctions polynômes f et g, de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$, définies par

$$f(x) = 9x^2 - 1 \quad \text{et} \quad g(x) = 9x^2 + 6x + 1.$$

1. Calculer les images par f et par fgf des réels -1 $\sqrt{2}$.
2. Mettre $f(x)$ et $g(x)$ sous forme de produits de facteurs du premier degré.
   Résoudre, dans $\mathbf{R}$, les équations
   $$f(x) = 0 \quad \text{et} \quad g(x) = 0.$$
3. Déterminer la fonction polynôme p, puis la fonction rationnelle q telles que l'on ait
   $$p(x) = g(x) - f(x) \quad \text{et}$$
   $$q(x) = \frac{2g(x)}{p(x)}.$$
   Trouver l'ensemble de définition de q.
   Simplifier $q(x)$ dans cel ensemble de définition.
4. On considère la fonction affine q' définie dans I'intervalle $I = [-2\ ;\ +2]$ par
   $$q'(x) = 3x + 1.$$
   Représenter graphiquement q' dans un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
5. En déduire, dans ce même repère la représentation graphique de la fonction h définie sur I par
   $$h(x) = |3x + 1|.$$

Géométrie

Dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, on considère les points A, B et C de coordonnées respective

$$\text{A}(1\,;\,2), \quad \text{B}(-\,1\,;\,6) \quad \text{et} \quad \text{C}(x\ ;\ 5) \quad (x \in \mathbf{R}).$$

1. Calculer d(A, B), puis, en fonction de x, d(A, C) et d(B, C).
2. Déterminer x pour que le triangle (A, B, C) soit rectangle en A.
   Calculer alors en degrés, avec la précision permise par les tables trigonométriques, l'écart angulaire de deux demi-droites [BA) et [BC).
3. On prend $x = 7$ pour la suite du problème.
   Calculer les coordonnées du point, I, milieu de (B, C).
4. Soit E le point symétrique du point A par rapport au point I.
   Quelles sont les coordonnées de E ?
5. Quelle est la nature du quadrilatère (A, B, E, C) ?