∽ Brevet Montpellier juin 1976 ∽

Algèbre

On considère l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = 5(x-1)^2 + (10x-15)(x-1).$$

1. Développer, réduire et ordonner $f(x)$.

2. Écrire $f(x)$ sous forme d'un produit de facteurs.

3. Soit la fonction rationnelle h telle que

$$h(x) = \frac{f(x)}{9(x-2)(3x-4)}.$$

   a. Quel est son ensemble de définition ?

   b. Simplifier $h(x)$.

4. **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation
$$\frac{5(x-1)}{9(x-2)} = 1.$$

   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation
$$\frac{5(x-1)}{9(x-2)} = 2.$$

   Donner un encadrement de la solution par deux quotients $\frac{a}{4}$ et $\frac{a+1}{4}$ où a est un entier naturel que l'on déterminera.

5. Dans un atelier d'usine, deux machines-outils de fonctionnement différent fabriquent des pièces de même type.

La machine A produit cinq pièces à l'heure, la machine B produit neuf pièces à l'heure.

On fait fonctionner ces deux machines pendant x heures. Ce temps de fonctionnement comprend un temps de réglage et un temps de production.

Le temps de réglage est de une heure pour la machine A et de deux heures pour la machine B.

   a. Quel est le temps de production pour chacune des deux machines ?

   (On suppose $x > 2$.)

   b. Soit y_1 le nombre de pièces fabriquées par la machine A et y_2 le nombre de pièces fabriquées par la machine B.

   Calculer y_1 et y_2 en fonction de x.

   c. À partir des résultats de la quatrième question trouver le temps de fonctionnement pour que $y_1 = y_2$.

   De même, trouver le temps de fonctionnement à un quart d'heure près par excès pour que $y_1 = 2y_2$.

Géométrie

Dans le plan euclidien (P) rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ on donne les points A, B et C tels que

$$\overrightarrow{\text{OA}} = \overrightarrow{\imath} + 3\overrightarrow{\jmath}, \quad \overrightarrow{\text{OA}} = 4\overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{OC}} = -3\overrightarrow{\imath}.$$

1. Démontrer que le triangle (ABC) est rectangle isocèle.

2. On considère l'application f de (P) dans (P) qui au point M de coordonnées x et y, fait correspondre le point M$'$ de coordonnées x' et y' telles que

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & y-2 \\ y' & = & x+2. \end{array}\right.$$

Montrer que B$'$ et C$'$ images respectives par f de B et de C ont pour coordonnées B$'(-3~;~6)$ et C$(-2~;~-1)$.

Quelle est l'image par f du point A ?

3. Démontrer que les droites (BB$'$) et (CC$'$) sont parallèles.

4. Démontrer que les points B, B$'$, C et C$'$ appartiennent à un cercle de centre A, dont on déterminera le rayon.

5. Calculer les coordonnées des milieux E et F de [BB$'$] et [CC$'$].

Montrer que A, E et F sont alignés et que B$'$ et C$'$ sont les images de B et C dans une symétrie orthogonale.

6. Calculer le sinus de l'écart angulaire de l'angle géométrique $\widehat{\text{CAF}}$.

En déduire la valeur approchée à un degré près par défaut de l'écart angulaire de l'angle $\widehat{\text{CAC}'}$.