Brevet Montpellier septembre 1978

Algèbre

Partie A

On considère deux applications f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$\left\{\begin{array}{llll} f: & x & \longmapsto & f(x) = (x+1)^2 - 49 \\ g: & x & \longmapsto & g(x) = (3x+1)(x-6) - 3(x-6) \end{array}\right.$$

1. Développer, réduire et ordonner $f(x)$ et $g(x)$.
2. Ecrire $f(x)$ et $g(x)$ sous forme de produits de facteurs du premier degré.
3. Calculer $f(0)$; $f(-2)$; $f\left(\sqrt{2}\right)$; $g(0)$; $g(6)$; $g\left(\dfrac{2}{3}\right)$.

   Les applications f et g sont-elles des bijections ? Pourquoi ?
4. Soit h la fonction rationnelle, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

   a. Quel est son ensemble de définition ?

   b. Simplifier $h(x)$;soit $h'(x)$ l'expression simplifiée.

   c. Résoudre les équations : $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = 1$; $x \in \mathbb{R}$, $\left|h'(x)\right| = 1$.
5. Dans un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ construire les représentations graphiques G_1 et G_2 des applications f_1 et f_2 de l'intervalle $I = [-5~;~+5]$ vers $\mathbb{R}$.

$$f_1: \begin{array}{lll} I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+8 \end{array} \qquad f_2: \begin{array}{lll} I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3x-2 \end{array}$$

   G_1 et G_2 sont des segments de droite dont on précisera les extrémités.

Géométrie

1. Dans un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, I est le point d'abscisse 3 et d'ordonnée 3, $\mathscr{C}$ est le cercle de centre I, passant par O.

   Calculer le rayon de ce cercle.
2. H est la projection orthogonale de I sur l'axe des abscisses.

   La droite (IH) coupe le cercle en deux points A et A$'$. (On désigne par A le point d'ordonnée négative).

   Calculer les coordonnées respectives de A et A$'$.
3. La droite (OI) recoupe le cercle en B. Montrer que OABA$'$ est un rectangle.
4. D est le symétrique de O par rapport à la droite (AA$'$).

   a. Montrer que D appartient au cercle $\mathscr{C}$.

   b. Montrer que la droite (ID) est la médiatrice de [OB].

5. t est la tangente au cercle $\mathscr{C}$ en D. t coupe l'axe des ordonnées en T.

   a. Montrer que OBDT est un parallélogramme.

   b. Calculer les coordonnées de T.

   c. Calculer $\tan \widehat{\text{ITD}}$.

   d. Donner la valeur approchée à 1° près par défaut de la mesure de l'angle $\widehat{\text{ITD}}$.