

🌀 Brevet Montpellier juin 1977 🌀

Algèbre

Soit l'application T de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ dans \mathbb{R} telle que :

$$T(a; b) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

1. Calculer $T(-2; 3)$; $T\left(\frac{4}{3}; -\frac{8}{5}\right)$; $T(\sqrt{3}; \sqrt{2} - \sqrt{3})$.

2. Soit f la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que :

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}.$$

Quel est l'ensemble de définition de f ?

3. Soit g la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que :

$$g(x) = \frac{3x}{(x+1)(2x+5) - 2x - 2}.$$

Déterminer l'ensemble de définition de g .

4. Soit h la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que :

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

a. Déterminer l'ensemble de définition de h .

b. Simplifier $h(x)$. (On trouvera $h(x) = \frac{2(2x+3)}{3(x-1)}$.)

c. Calculer $h(-\sqrt{2})$.

d. En utilisant l'encadrement à 10^{-3} près de $\sqrt{2}$ déduit de la table, déterminer l'encadrement à 10^{-2} près de $h(-\sqrt{2})$.

e. Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

$$h(x) = 1, \quad h(x) = -\frac{1}{3}.$$

Géométrie

AB désigne la distance des deux points A et B; on peut noter aussi cette distance : $d(A, B)$.

L'unité de longueur est le centimètre.

Construire un rectangle (A, B, C, D) tel que le côté [AB] ait pour mesure 2 et la diagonale [BD] pour mesure 4.

1. Calculer AD.

2. On appelle Δ la droite support de la diagonale $[BD]$, A' et C' les images respectives de A et C par la symétrie orthogonale d'axe Δ .

I est le point d'intersection de Δ et de la droite (AA') , J est le point d'intersection de Δ et de la droite (CC') .

Démontrer que : $AB = BA' = CD = C'D$

$$A'C = AC'.$$

Démontrer l'égalité : $\frac{BI}{BA} = \frac{BA}{BD}$.

En déduire $BI = 1$.

Montrer de même que $DJ = 1$ et calculer IJ .

3. Montrer qu'il existe un nombre réel k tel que $\vec{BI} = k\vec{BD}$, et calculer la valeur de k .

4. a. Quelles sont les images, par la symétrie d'axe Δ , des sommets du triangle (A, B, D) ?

Quelle est la nature du triangle (A', B, D) ?

Calculer les écarts angulaires de ses angles.

- b. Montrer que les points A, B, A', C, D, C' sont sur un même cercle dont on précisera le centre et calculera le rayon.

5. Montrer que $JC' = JC = AI$.

Quelle est la nature du quadrilatère (A, I, J, C') ?

Calculer AC' .