Brevet Montpellier juin 1978

Algèbre

f et g sont deux applications polynômes :

$$f : \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 - 49 \end{array} \qquad g : \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 - 14x + 49 + (x-7)(3x-1) \end{array}$$

1. Calculer $f(5)$; $f(-5)$ et $f\left(\sqrt{2}\right)$.
En déduire que f n'est pas une bijection.

2. Factoriser $f(x)$ et $g(x)$.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

$$f(x) = 0 \qquad ; \qquad g(x) = 0.$$

4. On appelle h la fonction rationnelle suivante :

$$h : \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{g(x)}{f(x)} \end{array}$$

a. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_h$ de h.

b. Simplifier $h(x)$.

c. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$h(x) = 0 \quad ; \quad h(x) = \frac{10}{7} \quad ; \quad |h(x)| = 1.$$

Géométrie

L'unité de longueur est le centimètre.
AB désigne la distance des deux points A et B.
Δ et Δ' sont deux droites perpendiculaires se coupant en I.
A et B appartiennent respectivement à Δ et Δ' et vérifient :
IA = 1 ; IB = 2
On considère les points C et D définis par :

$$\overrightarrow{\text{IC}} = -4\overrightarrow{\text{IA}} \quad ; \quad \overrightarrow{\text{ID}} = -4\overrightarrow{\text{IB}}.$$

1. Calculer AB, BC, AC, CD.
Quelle est la nature du triangle ABC ?

2. Montrer que le triangle BCD est rectangle.
Quel est le centre du cercle (Γ) circonscrit au triangle BCD.
On appellera O ce point.

3. Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
   Démontrer qu'il existe un réel k tel que : $\overrightarrow{\text{CD}} = k\overrightarrow{\text{AB}}$, et calculer la valeur de k.
4. Soit K = S_{O}(C) (S_{O} désignant la symétrie centrale de centre O).
   Quelle est la nature du quadrilatère CBKD ?
   En déduire que K appartient au cercle (Γ).
5. Situer les centres E et F des cercles circonscrits aux triangles IBA et IDC.
6. Sachant que $\overrightarrow{\text{IE}} = \overrightarrow{\text{IA}} + \overrightarrow{\text{AE}}$ et que $\overrightarrow{\text{IF}} = \overrightarrow{\text{IC}} + \overrightarrow{\text{CF}}$, montrer que $\overrightarrow{\text{IE}}$ et $\overrightarrow{\text{IF}}$ sont colinéaires.
   En déduire que les deux cercles admettent la même tangente au point I.