Brevet des collèges Nancy-Metz juin 1972

Enseignement long et enseignement court

Mathématiques traditionnelles

ALGÈBRE

On donne les polynômes :

$$\begin{aligned} A(x) &= x^2+x-6 \quad \text{et}\\ B(x) &= x^2-3x+2 \end{aligned}$$

1. Calculer $A(x)+B(x)$, $A(x)-B(x)$ et $A(x)\cdot B(x)$.

2. On pose $A(x)=C(x)+(x-2)$ et $B(x)=D(x)+(x-2)$.

a. Calculer $C(x)$ et $D(x)$.

b. En déduire une décomposition en produits de facteurs du premier degré des polynômes $A(x)$ et $B(x)$.

c. Calculer $\dfrac{A(x)}{B(x)}+\dfrac{4}{1-x}$.

d. Résoudre dans l'ensemble des nombres réels les équations

$$A(x)=0 \qquad \text{et} \qquad B(x)=0,$$

puis le système

$$\left\{\begin{aligned} A(x) &= 0,\\ B(x) &= 0. \end{aligned}\right.$$

3. Cette question est indépendante des deux premières.

a. Étudier le sens de variation des fonctions définies par

$$y_1=x+3 \qquad \text{et} \qquad y_2=1-x.$$

b. Représenter graphiquement les variations de ces fonctions dans un repère orthonormé.

Soit (D_1) et (D_2) les droites obtenues ; elles se coupent en M.

De plus, l'axe des abscisses coupe (D_1) en A et (D_2) en B.

Calculer les coordonnées des points M, A et B.

Calculer l'aire du triangle (MAB).

GÉOMÉTRIE

L'unité de longueur est le centimètre.
Sur une droite xy, on place deux points, I et H, tels que IH = 4.
On trace le cercle (I), de centre I et de rayon 5 ; il coupe la perpendiculaire en H à la droite xy en A et en B.
Soit O le point de xy extérieur au segment [IH] et tel que HO = 2, et (O) le cercle de centre O et de rayon OA.

1. Démontrer que le point H a même puissance par rapport aux cercles (I) et (O).
Évaluer cette puissance.
Calculer la longueur du rayon du cercle (O).

2. La droite xy coupe le cercle (O) en C et en D (C est entre I et H) ; elle coupe le cercle (I) en C′ et en D′ (C′ est entre O et H).
Démontrer la relation

$$\mathrm{HC} \cdot \mathrm{HD} = \mathrm{HC}' \cdot \mathrm{HD}'.$$

3. On mène la tangente en C au cercle (O). Elle coupe le demi-cercle (C′AD′) en P.
La droite (PH) recoupe le cercle (I) en Q.
En utilisant la première question, démontrer que les triangles (HPC) et (HDQ) sont semblables.

4. En déduire que DQ et HQ sont perpendiculaires et que les quatre points P, C, D et Q appartiennent à un même cercle ; trouver un diamètre de ce cercle.