Brevet des collèges Nancy-Metz juin 1973

Algèbre

Les trois exercices sont indépendants

Exercice I

On considère l'application f, de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, définie par

$$f(x) = 9x^2 - 1 - (3x+1)(4x-5).$$

1. Mettre $f(x)$ sous forme d'une fonction polynôme.
2. Mettre $f(x)$ sous (orme d'un produit de deux facteurs.
3. Résoudre, dans $\mathbf{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

Exercice II

On considère les deux applications f et g, de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, défi nies par

$$f(x) = x^2 - 10 \quad \text{et} \quad g(x) = -x+3,$$

et l'application composée $h = f \circ g$.
($f \circ g$ signifie « g suivie de f »)
Calculer l'image de $\sqrt{2}$ par l'application h et $h(x)$.

Exercice III

a et b étant deux nombres réels, soit la fonction affine, f. définie par

$$f(x) = ax + b.$$

Déterminer a et b sachant que

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -2 \qquad \text{et } f\left(-\frac{1}{2}\right) = -4.$$

Représenter graphiquement la fonction obtenue.

Géométrie

Soit trois points, A, B et C, d'un plan euclidien (P), muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
A a pour coordonnées 1 et -3 ;
B a pour coordonnées 5 et 5 ;
M a pour coordonnées 0 et 2,5.

1. Déterminer les coordonnées du point C, symétrique de B par rapport à M.

2. Calculer les distances $d(\text{A, B})$, $d(\text{B, C})$ et $d(\text{C, A})$ et démontrer que le triangle (A, B, C) est rectangle.
3. Déterminer le centre et le rayon du cercle passant par les points A, B et C.

   Démontrer que ce cercle coupe la droite, support de l'axe des abscisses, en deux points.

   Quelles sont les coordonnées de ces points ?
4. $\mathcal{A}$ est l'axe qui a pour support la droite (BC) et pour lequel $\overline{\text{CB}}$ est positif.

   Calculer les rapports de projection orthogonale

   de l'axe $\mathcal{A}$ sur l'axe des abscisses,
   de l'axe $\mathcal{A}$ sur l'axe des ordonnées.

   Quelle est la somme des carrés de ces deux rapports de projection ?

   N. B. — La distance $d(\text{A, B})$ peut encore être notée AB.