Brevet Nancy-Metz juin 1981

Algèbre

Soit A l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$A(x) = (3x-2)(2x+1) - (3x-2)^2 + 9x^2 - 4.$$

1. Développer, réduire et ordonner $A(x)$. (On ordonnera suivant les puissances décroissantes de x.)
2. Factoriser $A(x)$.
3. Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, construire les droites (D_1) et (D_2) ayant respectivement pour équations

$$y = 3x-2 \quad \text{et} \quad y = 2x+5.$$

4. La droite (D_1) coupe l'axe des abscisses en un point I.
   La droite (D_2) coupe l'axe des abscisses en J.
   Calculer les coordonnées de I et de J.
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $A(x) = 0$.
   Interpréter graphiquement les solutions de cette équation.

Géométrie

On considère dans un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ les points A, B et C définis par

$$\overrightarrow{\text{OA}} = 4\vec{\imath} + 5\vec{\jmath}, \qquad \overrightarrow{\text{OB}} = -5\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}, \qquad \overrightarrow{\text{OC}} = \vec{\imath} - 4\vec{\jmath}.$$

1. Calculer les distances AB et AC ; en déduire la nature du triangle (A, B, C).
2. Soit H la projection orthogonale de A sur (BC).
   Trouver les coordonnées de H.
3. Soit $\text{A}'\left(-\dfrac{7}{2} ; -\dfrac{5}{2}\right)$.
   Montrer que les points A′, H et A sont alignés.
4. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{\text{A}'\text{C}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ sont orthogonaux.
5. On désigne par $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle (A, A′, C).
   Préciser la position de son centre K et trouver ses coordonnées.
   Montrer que le point B appartient au cercle $\mathscr{C}$.