Brevet des collèges Nancy septembre 1970

ALGÈBRE

1. Mettre sous la forme d'un produit de facteurs les expressions suivantes :

$$\begin{array}{rcl} A(x) & = & \left(x^2-4\right)^2-4(x+2)^2, \text{ et} \\ B(x) & = & x^3+2x^2-16x-32. \end{array}$$

2. Former $E(x)=\dfrac{A(x)}{B(x)}$.

Quelles sont les valeurs de x pour lesquelles $E(x)$ est définie ?

L'expression $E(x)$ peut-elle s'annuler ?

Donner la ou les valeurs correspondantes de x.

Simplifier la fraction $E(x)$.

3. Déterminer x pour que $E(x)$ soit égale à 2.

4. Tracer, dans un repère orthonormé $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$ les droites (D_1), (D_2) et (D_3) représentant graphiquement les fonctions définies respectivement par

$$y=x, \quad y=x+2 \quad \text{et} \quad y=x+4.$$

La droite (D_2) coupe l'axe des abscisses en C et l'axe des ordonnées en I.

Le cercle de centre O, de rayon CI, coupe l'axe d abscisses en deux points ; soit H l'un d'eux. On trace par H la parallèle à l'axe des ordonnées ; elle coupe (D_1) en M_1, (D_2) en M_2 et (D_3) en M_3.

Calculer

$$\frac{\overline{\text{HM}_1}\times\overline{\text{HM}_2}}{\overline{\text{HM}_3}}.$$

GÉOMÉTRIE

Soit un triangle ABC rectangle en C. Les bissectrices extérieures des angles $\widehat{\text{B}}$ et $\widehat{\text{C}}$ se coupent en O.

On considère le cercle (O) de centre O, tangent aux droites portant les côtés du triangle.

Soit D, E et F les points de contact de ce cercle respectivement avec les côtés [AB], [AC] et [BC].

L'intersection de (OE) avec (AB) est le point E$'$.

1. Comparer les directions des droites (CB) et (EE$'$) puis démontrer la relation

$$\text{AB}\times\text{AE}=\text{AE}'\times\text{AC}.$$

2. Quelle est la nature de chacun des triangles COB et BOE$'$?

3. Soit I l'intersection de la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{ACB}$ avec (AO).
   Démontrer que le quadrilatère OCIB est inscriptible dans un cercle.
   Préciser la position du centre O$'$ de ce cercle.
4. Démontrer que le triangle IBO est isocèle.
5. Calculer la puissance du point C par rapport au cercle (O) en fonction du rayon de ce cercle.