∽ Brevet Nancy–Metz septembre 1976 ∾

ALGÈBRE

Partie A

Soit les fonctions polynômes f et g définies par

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & (x+5)^2-9x^2+30x-25 \text{ et} \\ g(x) & = & 2x-10-3(x-5)-25+x^2 \end{array}$$

1. Factoriser $f(x)$ et $g(x)$.
2. Soit $q=\dfrac{f}{g}$; déterminer l'ensemble de définition de . la fonction q.
   Simplifier $q(x)$.
3. Calculer $q(0)$, $q\left(\sqrt{2}-5\right)$ (rendre entier le dénominateur).

Partie B

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :
   a. $7x+4 \geqslant \dfrac{9-3x}{5}$;
   b. $2x\sqrt{3}-5\sqrt{2}+2x\sqrt{2}>5\sqrt{3}$.
2. Peut-on trouver un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ dans lequel les deux inéquations sont simultanément vérifiées ?

GÉOMÉTRIE

Dans un plan euclidien muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, placer les points A, B, C et H définis respectivement par

$$\overrightarrow{\text{OA}}=-2\vec{\imath}+4\vec{\jmath}, \quad \overrightarrow{\text{OB}}=4\vec{\imath}+\vec{\jmath}, \quad \overrightarrow{\text{OC}}=2\vec{\imath}+7\vec{\jmath} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{OH}}=3\vec{\jmath}.$$

1. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{\text{AH}}$, $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{HC}}$ en fonction de $\vec{\imath}$ et de $\vec{\jmath}$.
   Démontrer que les points A, B et H sont alignés
2. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{\text{HC}}$ et $\overrightarrow{\text{AB}}$ sont orthogonaux.
   Calculer les distances $d(\text{H, C})$, $d(\text{B, C})$, $d(\text{H, B})$.
   Quelle est la nature du triangle défini par le triplet (B, H, C) ?
3. Soit α l'écart angulaire en degrés de l'angle géométrique $\widehat{\text{ABC}}$.
   Calculer $\sin\alpha$ et $\tan\alpha$.
   Déterminer α.
4. Calculer les coordonnées du milieu M du segment [AC].
   Tracer le cercle ($\mathscr{C}$) de centre M et de rayon [MA].
   Démontrer que le point H appartient au cercle ($\mathscr{C}$).
5. Ce cercle recoupe l'axe des ordonnées en K.
   Quelle est la nature du quadrilatère défini par (A, H, C, K) ?