Brevet des collèges Nantes juin 1974

ALGÈBRE

On considère les deux fonctions polynômes f et g de **R** dans **R** définies par

$$\begin{aligned} f(x) &= 3(x-1)^2 - x^2 + 1 + (x-1)(x+2) \text{ et} \\ g(x) &= 9x^2 - 4. \end{aligned}$$

1. Développer $f(x)$ et l'ordonner suivant les puissances décroissantes de x.
2. Factoriser $f(x)$ et $g(x)$.
3. On considère la fonction rationnelle q de **R** dans **R** définie par

$$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

   a. Déterminer le domaine de définition de q.
   b. Simplifier q(x) dans son domaine de définition.
   c. Résoudre dans **R** l'équation $q(x) = 0$.
   d. Résoudre dans **R** l'équation $q(x) = 1$.
   e. Résoudre dans **R** l'équation $q(x) = \frac{-1}{12}$.

GÉOMÉTRIE

Dans le plan euclidien (P) rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère les points A, B et C définis par

$$\overrightarrow{\text{OA}} = -\vec{\imath} + 6\vec{\jmath}, \quad \overrightarrow{\text{OA}} = -2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{OC}} = 3\vec{\imath} + 5\vec{\jmath}.$$

1. Indiquer les coordonnées de ces trois points ; les porter sur une figure propre.
   Démontrer que le triangle (A, B, C) est un triangle isocèle, rectangle en A.
2. On appelle H le projeté orthogonal (ou la projection orthogonale) de A sur (BC) ; calculer BH, HC et AH.
3. Calculer le sinus et la tangente de l'écart angulaire de l'angle géométrique $\widehat{\text{ABC}}$.
4. On considère l'application f de (P) dans (P) qui, à chaque point M ayant pour coordonnées $(x\,;\,y)$, associe le point M$'$ ayant pour coordonnées $\left(x'\,;\,y'\right)$ définis par

$$\left\{\begin{aligned} x' &= -x + 2, \\ y' &= -y - 4. \end{aligned}\right.$$

   On notera $\text{M}' = f(\text{M})$: M$'$ est l'image de M et M est l'antécédent de M$'$.

   a. Calculer $(x\,;\,y)$ en fonction de $\left(x'\,;\,y'\right)$.
   En déduire que f est une bijection.

b. Démontrer qu'il existe un point unique, I, confondu avec son image $\text{I} = f(\text{I})$; indiquer les coordonnées de I.

c. Calculer $\overrightarrow{\text{IM}}$ et $\overrightarrow{\text{IM}'}$ en fonction des coordonnées $(x\,;\;y)$ de M.

Que peut-on en conclure pour ces deux vecteurs et pour le point I par rapport au bipoint (M, M') ?

Quelle est la nature de l'application f ? Cette application est-elle une isométrie ?

d. Calculer les coordonnées de $\text{A}' = f(\text{A})$, $\text{B}' = f(\text{B})$, $\text{C}' = f(\text{C})$ et $\text{H}' = f(\text{H})$.

Quelle est la nature du triangle $(\text{A}', \text{B}', \text{C}')$.

Quel rôle H' joue-t-il dans ce triangle ?