∽ Brevet Nantes juin 1981 ∾

Algèbre

Soient f et g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définies par

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x-3)(x-4)-(2x-3)^2+4x^2-9 \\ g(x) &= (3x+1)^2-(x+4)^2. \end{aligned}$$

1. Développer, réduire et ordonner $f(x)$ et $g(x)$ suivant les puissances décroissantes de x.
2. Calculer $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$ et $f(-2)$; f est-elle une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? Justifier la réponse.
3. Calculer $g\left(\sqrt{3}+1\right)$.
   Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près par défaut de $g\left(\sqrt{3}+1\right)$ (on rappelle que $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$).
4. Factoriser $f(x)$ et $g(x)$.
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les deux équations suivantes :
   a. $g(x) = 0$;
   b. $f(x) = g(x)$.

Géométrie

Soit un triangle rectangle isocèle (A, B, C) tel que (AB) soit perpendiculaire à (AC) et que d(A, B) soit égale à 6.

1. On appelle H le projeté orthogonal de A sur (BC) : calculer d(B, C) et d(A, H).
2. Soit K le symétrique de H dans la symétrie orthogonale d'axe (AC).
   Quelle est la nature du quadrilatère (A, H, C, K) ?
3. Démontrer que les points A, H, C et K appartiennent à un cercle $\mathscr{C}$ dont on précisera le centre et le rayon.
   En déduire que la droite (AB) est tangente à $\mathscr{C}$.
4. Soit L le symétrique de K dans la symétrie orthogonale d'axe (AB) : démontrer que les points A, L et H sont alignés.
5. Soit $\{J\} = (LK) \cap (AB)$.
   Déterminer $\cos\widehat{LBA}$ et $\tan\widehat{LBA}$.
   En déduire les mesures approchées à 1° près par défaut des angles $\widehat{LBA}$, $\widehat{KBA}$ et $\widehat{BLK}$.