∽ Brevet des collèges Nantes septembre 1975 ∾

Algèbre

Partie A.

1. Résoudre, dans **R**, le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2y-4x+6 & = & 0\\ y+3x-7 & = & 0\end{array}\right.$$

2. Étudier, puis représenter dans le plan muni du repère $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$, les fonctions $f(x)$ et $g(x)$:

$$f:\ \begin{array}{rcl}\mathbf{R} & \to & \mathbf{R}\\ x & \longmapsto & y=2x-3\end{array} \qquad f:\ \begin{array}{rcl}\mathbf{R} & \to & \mathbf{R}\\ x & \longmapsto & y=-3x+7\end{array}$$

Déterminer les coordonnées du point I, intersection des droites représentatives des fonctions f et g.
Pouvait-on prévoir ce résultat ?

Partie B.

1. Développer $A(x)$ et $B(x)$:

$$\begin{array}{rcl} A(x) & = & 2(2x-3)^2-(x+4)(x-2)\\ B(x) & = & (3x-4)(5x+2)\end{array}.$$

2. Factoriser $C(x)$ et $D(x)$:

$$\begin{array}{rcl} C(x) & = & (5x-3)^2-(2x-1)^2\\ D(x) & = & 30x^2-28x-16\end{array}$$

3. Soit $E(x)=\dfrac{C(x)}{B(x)}$.
Après avoir déterminé l'ensemble de définition de $E(x)$, simplifier cette expression.
Calculer $E(0)$ et $E\left(\dfrac{3}{4}\right)$.

Géométrie

Soit, dans le plan euclidien, un triangle isocèle (A, B, C) : $d(\text{A, B}) = d(\text{C, B}) = 5$ et $d(\text{A, C}) = 6$. Soit M le milieu de [AC], H le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC) et D le projeté orthogonal du point M sur la droite (BC).

1. Démontrer :

   a. que (AH) et (MD) appartiennent à la même direction.
   b. que Dest le milieu de [HC].

2. Calculer :
   $d(\text{C, M})$; $d(\text{C, D})$; $d(\text{D, M})$; $d(\text{A, H})$.
3. Soit E le point du plan défini par
$$\overrightarrow{\text{CE}} = \overrightarrow{\text{BA}}.$$
   a. Quelle est la nature du quadruplet (A, B, C, E)
   b. Démontrer que les points B, M et E sont alignés.
4. Démontrer que le cercle circonscrit du triangle (M, D, C) est tangent à la droite (BE).
5. **a.** Calculer le cosinus de l'écart angulaire de l'angle géométrique $\widehat{\text{ACH}}$.
   b. Calculer le sinus et la tangente de ce même écart angulaire.
   c. I est le point commun à (AH) et (BE).
   Calculer $d(\text{A, I})$ et $d(\text{I, M})$.
   Quel rôle joue I dans le triangle (A, B, C) ?