∾ Brevet Nantes septembre 1976 ∾

ALGÈBRE

On étudie les deux fonctions polynômes f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$\begin{array}{rcl} f : x \longmapsto f(x) & = & (2x-1)(12x-1)-4x^2+1 \text{ et} \\ f : x \longmapsto g(x) & = & 20x-4. \end{array}$$

1. Mettre $f(x)$ sous la forme d'un polynôme réduit et ordonné.
2. Mettre $f(x)$ sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré.
3. Calculer $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $f\left(\dfrac{1}{3}\right)$ et $f\left(\sqrt{3}+1\right)$.
4. Soit h la fonction qui, au réel x, associe

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

   a. Quel est l'ensemble de définition de h ?

   b. Simplifier $h(x)$ sur cet ensemble.
5. Résoudre l'équation $h(x) + \dfrac{3}{10} = 0$.
6. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.

GÉOMÉTRIE

Dans le plan euclidien (P) rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$, on considère les points A, D et C définis par

$$\overrightarrow{\text{OA}} = -2\overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{\text{OB}} = 8\overrightarrow{\imath} + 4\overrightarrow{\jmath} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{OA}} = 4\overrightarrow{\imath} + 7\overrightarrow{\jmath}$$

.

1. Porter ces trois points sur une figure, que l'on complétera après chaque question.
   Calculer les coordonnées (ou composantes) et les normes des vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$, $\overrightarrow{\text{AC}}$ et $\overrightarrow{\text{BC}}$.
   (La norme du vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}$ est la distance de A à B.)
   En déduire que le triangle (A, B, C) est rectangle en C.
2. **a.** Déterminer les coordonnées du, milieu I du bipoint (A, B).

   b. Soit D l'image du point C par la symétrie centrale de centre I. Déterminer les coordonnées du point D.

   c. Démontrer que le quadrilatère (A, C, B, D) est un rectangle.
3. Déterminer le centre et le rayon du cercle circonscrit au rectangle (A, C, B, D).
4. Soit J le milieu du bipoint (A, C).

   a. Démontrer que les droites (IJ) et (BC) sont parallèles.

   b. Démontrer que le triangle (A, J, I) est rectangle en J.

   c. Démontrer l'égalité $\overrightarrow{\text{BC}} = 2\overrightarrow{\text{IJ}}$.
   Quelle est l'image de B dans la composée $\left(S_{\text{J}} \circ S_{\text{I}}\right)$ des symétries de centres I et J ?