Brevet Nantes septembre 1978

Algèbre

Les application polynômes f et g sont définies dans $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(4x^2-4x+1\right)\left[(x-1)^2-4\right] \\ g(x) &= \left(x^2-6x+9\right)\left[\left(x^2-1\right)+x(x+1)\right] \end{aligned}$$

1. Écrire $f(x)$ et $g(x)$ sous la forme de produits de binômes du premier degré.
2. Quel est l'ensemble de définition de la fonction rationnelle h qui, à x, associe $h(x)$:
$$h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}.$$
3. Si x appartient à cet ensemble de définition, démontrer que $h(x)$ peut s'écrire :
$$h(x)=\frac{2x-1}{x-3}.$$
4. **a.** Résoudre l'équation $h(x)=1$.

   b. Calculer $h\left(\frac{4}{3}\right)$.
5. Dans le plan muni du repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, tracer les droites (d) et (d') représentant respectivement les applications définies par :
$$x \longmapsto 2x-1 \text{ pour } (d), \qquad x \longmapsto x-3 \text{ pour } (d').$$
Expliquer comment on peut retrouver graphiquement les deux résultats de la quatrième question.

Géométrie

Sur une demi-droite [Ax) on considère les points B, C et D définis par

$$d(\text{A, B})=a, \quad d(\text{A, C})=2a, \quad d(\text{A, D})=3a$$

où a représente un réel strictement positif.
Sur l'une des demi-droites perpendiculaires en B à [Ax), on marque le point P défini par $d(\text{B, P})=a$.
Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (PD).

1. Quelle est la nature du triangle (P, B, C) ?
Calculer $d(\text{P, C})$.
2. Démontrer que les points P, B, C et H appartiennent à un même cercle $\mathscr{C}$ dont on précisera le centre et le rayon.
3. Démontrer que la droite (AP) est tangente au cercle $\mathscr{C}$ en P.
4. Calculer $d(\text{P, D})$.
Évaluer le cosinus de l'écart angulaire de $\widehat{\text{HOC}}$ et en déduire $d(\text{H, D})$, $d(\text{P, H})$ et $d(\text{H, C})$.
5. La parallèle à [Ax) qui contient P coupe $\mathscr{C}$ en E.
Préciser la nature du quadrilatère (P, E, D, C).