Brevet Nice juin 1985

Algèbre

On considère l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = (3x-1)^2 + 2(x-2)(3x-1) - \left(9x^2-1\right).$$

1. Développer, réduire et ordonner $f(x)$.
2. Factoriser $f(x)$.
3. Calculer $f\left(10^{-1}\right)$ puis $f\left(3+\sqrt{2}\right)$.
4. Sachant que $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$, en déduire un encadrement de $f\left(3+\sqrt{2}\right)$ d'amplitude 0,3.
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $f(x) = 0$.
6. Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-y-3 &=& 0\\ 3x-y-1 &=& 0.\end{array}\right.$$

   Dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, construire les droites D_1 et D_2 d'équations respectives

$$x-y-3=0 \quad \text{et} \quad 3x-y-1=0.$$

   Vérifier graphiquement les résultats du système.

7. Résoudre graphiquement le système d'inéquations

$$\left\{\begin{array}{rcl} y &\leqslant& 0\\ x-y-3 &\leqslant& 0\\ 3x-y-1 &\geqslant& 0.\end{array}\right.$$

Géométrie

1. Dans le plan rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, placer les points

$$\text{A}(-2\,;\,1),\quad \text{B}(4\,;\,4),\quad \text{C}(7\,;\,-2),\quad \text{K}(0\,;\,2),\quad \text{I}(1\,;\,0).$$

2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{OC}}$.
   Montrer que ces deux vecteurs sont orthogonaux puis calculer leur norme.
   En déduire la nature du triangle ABC.
3. Calculer les coordonnées de E centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
   Soit S la symétrie de centre E et le point D défini par $S(\text{B}) = \text{D}$.
   Placer le point D.
   Que dire du quadrilatère ABCD ? Justifier.
4. Montrer :

que les points A, I, C sont alignés ;

que les points A, K, B sont alignés ;

que les droites (KI) et (BC) sont parallèles.

En déduire que le triangle KIB est rectangle en K.

5. **a.** Calculer $d(\text{K}, \text{B})$: $d(\text{B}, \text{I})$; $d(\text{K}, \text{I})$ et retrouver le résultat précédent.

   b. Si a est la mesure en degrés de l'angle $\widehat{\text{KBI}}$, quelle est la valeur approchée à 10^{-2} près de :

$$\cos a, \quad \sin a, \quad \tan a.$$

(On donne $\sqrt{5} \approx 2,236$.)