∽ Brevet Orléans–Tours juin 1976 ∾

Algèbre

1. On considère les fonctions polynômes f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{lcl} définiesparf(x) & = & (2x-3)^2-(x+5)(3-2x)-\left(4x^2-9\right) \text{ et} \\ g(x) & = & (2x-3)(5x-1)-(4x-6)(x+2)+2(2x-3)(-2x+5). \end{array}$$

Mettre $f(x)$ et $g(x)$ sous forme de produits de facteurs du premier degré.

2. On considère la fonction rationnelle h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$h(x)=\frac{(2x-3)(x-1)}{(3-2x)(x-5)}.$$

Donner son ensemble de définition $\mathcal{E}$.
Simplifier h(x).
Calculer $h\left(\sqrt{3}\right)$ en rendant le dénominateur rationnel.

3. Résoudre, dans $\mathcal{E}$, les équations suivantes

$$h(x)=0,\quad h(x)=1,\quad h(x)=7.$$

4. Construire dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ les représentations graphiques des deux fonctions affines définies par

$$p(x)=x-1 \quad \text{et} \quad q(x)=-x+5.$$

Déterminer par le calcul les coordonnées de leur point d'intersection.

Géométrie

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$. Placer les points

$$(1\,;\,1),\quad \text{B}(4\,;\,0),\quad \text{C}(3\,;\,-3)\quad \text{et}\quad \text{D}(0\,;\,-2).$$

1. Montrer que le quadruplet (A, B, C, D) est un parallélogramme.
Déterminer les coordonnées de son centre I.

2. Calculer les distances d(A, B), d(B, C) et d(A, C).
En déduire que le triangle (A, B, C) est rectangle isocèle.

3. **a.** Montrer que les quatre points A, B, C et D appartiennent à un cercle ($\mathcal{C}$), dont on précisera le centre et le rayon.

b. Montrer que le point O appartient à ($\mathcal{C}$).

c. Calculer la valeur du cosinus de l'écart angulaire de l'angle géométrique $\widehat{\text{ODB}}$.
Sachant que 2,236 est une valeur approchée par défaut de $\sqrt{5}$,déterminer à l'aide des tables un encadrement de largeur 1° de $\widehat{\text{ODB}}$

4. Soit E le symétrique de B dans la symétrie de centre A.

a. Déterminer les coordonnées du point E.

b. Que représente la droite (AD) pour le segment [BE] ?
Que peut-on conclure pour le triangle (E, B, D) ?
En déduire que la droite (ED) est tangente au cercle ($\mathcal{C}$).