Brevet Orléans-Tours septembre 1980

Algèbre

On considère les deux fonctions f et g définies, dans $\mathbb{R}$, par

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(49-28x+4x^2\right)-(7-2x)(5-6x)+21-6x \\ g(x) &= 16x^2-25. \end{aligned}$$

1. Écrire $f(x)$ sous la forme d'un polynôme réduit et ordonné.
2. Développer $(7-2x)^2$ puis écrire $f(x)$ et $g(x)$ sous la forme de produits de polynômes du premier degré.
3. Calculer $f(0)$, $f(3,5)$, $f\left(\sqrt{2}\right)$ et $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.
4. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x)=0$ puis l'équation $f(x)=g(x)$.
5. On considère la fonction rationnelle F définie, dans $\mathbb{R}$, par

$$F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

   a. Déterminer l'ensemble de définition, $\mathcal{D}$, de cette fonction rationnelle.

   b. La fonction rationnelle F' définie, dans $\mathbb{R}$, par

$$F'(x)=\frac{-2x+7}{4x-5}$$

   est-elle égale à la fonction F ?

6. Représenter graphiquement les fonctions affines h et k définies, dans $\mathbb{R}$ par

$$h(x)=-2x+7 \quad \text{et} \quad k(x)=4x-5.$$

   Résoudre l'équation $F'(x)=1$ et expliquer comment on peut vérifier à l'aide du graphique le résultat obtenu.

Géométrie

Dans un plan euclidien muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, $\left(\left\|\vec{\imath}\right\| = \left\|\vec{\jmath}\right\| = 1 \text{ cm}\right)$, placer les points A, B et C définis par

$$\overrightarrow{\text{OA}}=-2\vec{\imath}+\vec{\jmath}\ ; \quad \overrightarrow{\text{OB}}=4\vec{\imath}-3\vec{\jmath}\ ; \quad \overrightarrow{\text{OC}}=5\vec{\imath}+5\vec{\jmath}.$$

1. Calculer les coordonnées du point D milieu du segment [AB].
2. Montrer que la droite (CD) est médiatrice du segment [AB].
   En déduire la nature du triangle (A, B, C).

3. Calculer les coordonnées du point E tel que le quadruplet (A, B, C, E) soit un parallélogramme.
4. Démontrer que le triangle (C, D, E) est un triangle rectangle isocèle.

   Déterminer le rayon r et les coordonnées du centre M du cercle circonscrit au triangle (C, D, E).

   Le point G$(-5\ ;\ 4)$ est-il un point de ce cercle ?
5. Donner une valeur approchée du cosinus de l'écart angulaire de l'angle géométrique $\widehat{\text{ACD}}$ à 0,001 près par excès, sachant que

$$2,236 < \sqrt{5} < 2,237.$$

   À l'aide d'une table trigonométrique, déterminer la valeur approchée entière à un degré près par défaut de l'écart angulaire de $\widehat{\text{ACD}}$).