∽ Brevet Paris juin 1978 ∽

Algèbre

1. Soit A la fonction polynôme définie, pour tout réel x, par

$$A(x) = 64 - 9x^2.$$

Mettre $A(x)$ sous forme d'un produit de deux polynômes du premier degré.

2. Soit B la fonction polynôme définie, pour tout réel x, par

$$B(x) = x(49 + 12x) + 50 + (3x + 7)(2 - x).$$

Développer, réduire et ordonner ce polynôme.
En déduire qu'il est le carré d'un polynôme du premier degré.

3. Quel est l'ensemble de définition E de la fonction rationnelle h définie par

$$h(x) = \frac{B(x)}{A(x)}.$$

Le réel x appartenant à E, simplifier $h(x)$, puis calculer $h(-3)$ et $h(0)$.

4. Résoudre dans l'ensemble E, l'équation

$$h(x) = 0.$$

5. Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$A(x) > 0.$$

Géométrie

Dans le plan euclidien (P) rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on place les points A, B et C définis par leurs coordonnées :

$$\text{A}(2\,;\,-1), \qquad \text{B}(6\,;\,1), \qquad \text{C}(4\,;\,5).$$

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{BC}}$ ainsi que les normes de ces vecteurs.
En déduire que le triangle ABC est rectangle et isocèle : chacune de ce deux affirmations sera justifiée.

2. On appelle I le milieu du bipoint (A, C) et J le milieu du bipoint (A, B).
Trouver les coordonnées de points I et J.
La droite (BI) et la droite (CJ) ont pour intersection le point G.
Quelle est l'abscisse de G?
En déduire le nombre réel m tel que $\overrightarrow{\text{GM}} = m.\overrightarrow{\text{GI}}$.
On pourra considérer les projections orthogonales des points B et I sur l'axe $\left(\text{O}, \vec{\imath}\right)$, puis énoncer et appliquer l'axiome de Thalès.

3. Trouver les coordonnées du point D, symétrique de B par rapport à I.
   Montrer que le quadruplet (A, B, C, D) est un carré.
4. Soit E le point défini par $\overrightarrow{\mathrm{DE}} = 4\vec{\imath} - \vec{\jmath}$.
   Montrer que les cinq points (A, B, C, D, E) appartiennent à un cercle de centre I, dont on précisera le rayon.
5. Soit u l'écart angulaire de l'angle géométrique $\widehat{\mathrm{ECA}}$.
   Calculer, au choix, le sinus, le cosinus ou la tangente de cet écart angulaire u, et donner de u la valeur approchée en degrés, à un degré près par défaut.