

∞ Brevet Paris juin 1979 ∞

ALGÈBRE

Exercice 1

On donne la fonction polynôme P , de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , définie par

$$P(x) = (3x - 1)(2x + 5) + 9x^2 - 1.$$

1. Développer, réduire et ordonner $P(x)$.
2. Montrer que, pour tout réel x ,

$$P(x) = (ax + b)(3x - 1),$$

où a et b sont des entiers relatifs que l'on précisera.

3. Étudier, suivant les valeurs de x , le signe de $(3x - 1)$ et celui de $(5x + 6)$; en déduire celui de $P(x)$
(On pourra dresser un tableau.)
4. Quel est l'ensemble \mathcal{D} des nombres réels x pour lesquels on peut calculer

$$\sqrt{(3x - 1)(5x + 6)}?$$

On considère l'application

$$\begin{aligned} f: \mathcal{D} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{(3x - 1)(5x + 6)}. \end{aligned}$$

Calculer, si elles existent, les images de $\frac{1}{3}$, $-\frac{6}{5}$, 0 et 2 par l'application f .

5. La fonction rationnelle g , de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , est donnée par

$$g(x) = \frac{9x^2 - 6x + 1}{(3x - 1)(5x + 6)}$$

Quel est son ensemble de définition \mathcal{D}_g ?

Simplifier, sur \mathcal{D}_g l'écriture de $g(x)$.

Résoudre, dans \mathbb{R} , l'équation

$$g(x) = 1.$$

GÉOMÉTRIE

Le plan euclidien étant muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on donne les points

$$A(1; 2), \quad B\left(\frac{9}{2}; \frac{5}{2}\right), \quad C(4; -1), \quad D\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

1. Montrer que le quadruplet (A, B, C, D) est un parallélogramme.
2. Démontrer les trois propriétés suivantes :
 - les vecteurs \overrightarrow{BD} et \overrightarrow{AC} sont orthogonaux;
 - le quadruplet (A, B, C, D) est un losange;
 - la droite (BD) est la médiatrice du segment $[AC]$.
3. On appelle E le milieu du bipoint (A, D) .

Quelles sont ses coordonnées?

On appelle F le symétrique de C par rapport à O .

Quelles sont ses coordonnées?

Démontrer que les points B, E et F sont alignés.
4. On appelle \mathcal{C} le cercle dont le centre est D et qui passe par A .

Démontrer que les points C et F appartiennent au cercle \mathcal{C} .