∽ Brevet Paris–Créteil–Versailles juin 1977 ∾

Algèbre

On considère les fonctions polynômes f et g définies par

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2+4x+2 \\ g(x) &= x^2-9-(2x+6)(x-1)-(x+1)(x+3) \end{aligned}$$

1. Factoriser les polynômes $f(x)$ et $g(x)$.
2. Calculer $g\left(\dfrac{2}{5}\right)$; on donnera le résultat sous la forme d'un nombre décimal.
3. Soit q la fonction rationnelle définie par

$$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

   a. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_q$ de la fonction rationnelle q.

   b. x étant élément de $\mathcal{D}_q$, simplifier $q(x)$; on trouvera

$$q(x) = -\frac{x+1}{x+3}.$$

   c. Calculer $q\left(\sqrt{2}\right)$.
   Écrire le résultat sous la forme d'un quotient dont le dénominateur est rationnel.
   Sachant que $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$ donner la valeur approchée de $q\left(\sqrt{2}\right)$ à un centième près par défaut.

4. **a.** Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, les équations

$$q(x) = 1 \qquad \text{et} \qquad q(x) = -1.$$

   b. Dans un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ construire les représentations graphiques C_1 et C_2 des fonctions h_1 et h_2 respectivement définies par

$$h_1(x) = |x+1| \qquad \text{et} \qquad h_2(x) = |x+3|$$

   c. Déterminer l'ensemble $C_1 \cap C_2$.
   Pouvait-on prévoir ce résultat ?

Géométrie

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Les points A et B sont définis par leurs coordonnées :

$$A(4\,;\,0)\,; \quad B\,(0\,;\,2)$$

Le point C appartient à l'axe $\left(O, \vec{\imath}\right)$ et son abscisse inconnue est désignée par x.

1. Déterminer x de façon que le triangle (A, B, C) soit rectangle en B.

2. Déterminer par ses coordonnées le point D, tel que le quadruplet (A, B, C, D) soit un rectangle.

   On trouvera pour les coordonnées de D le couple $(3\ ;\ -2)$.
3. Il existe un cercle (I) circonscrit au rectangle (A, B, C, D).

   Le définir par les coordonnées de son centre I et la mesure de son rayon, r.
4. Le cercle (I) coupe l'axe $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ en deux points : B , déjà connu, et un point E .

   Quelles sont les coordonnées de E ?