Brevet des collèges Paris septembre 1972

ALGÈBRE

On considère les fonctions rationnelles A(x), B(x) et C(x) de la variable réelle x suivantes :

$$A(x) = \frac{x^2}{x^3+3x^2},\quad B(x) = \frac{6-2x}{x^2-6x+9},\quad C(x) = \frac{60x}{5x^3-45x}.$$

1. Préciser le domaine de définition de chacune de ces fonctions.
Dans la suite du problème la variable x appartiendra à la fois à ces trois domaines.
Écrire alors les expressions précédentes sous une forme simplifiée.

2. Calculer la fonction E définie par

$$E(x) = A(x) - B(x) - C(x).$$

Le résultat sera donné sous la forme la plus simple possible.

3. Calculer la valeur, $E\left(\sqrt{3}\right)$, prise par l'expression précédente pour $x = \sqrt{3}$.
On donnera la valeur exacte et la valeur approchée par défaut à un centième près.
On rappelle que $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$.

4. Dans les conditions précisées plus haut,

a. existe-t-il une valeur de x telle que $E(x) = 1$;

b. existe-t-il une valeur de x telle que $E(x) = \dfrac{3}{4}$?

5. Dans un repère orthonormé (unité de longueur : le centimètre), représenter graphiquement les fonctions y_1 et y_2 définies par

$$y_1 = 3 \qquad \text{et} \qquad y_2 = x+3.$$

GÉOMÉTRIE

Dans un cercle de diamètre [AB] tel que AB = 72 mm, on trace une corde [AC] telle que AC = 54 mm.
La droite (AC) coupe en P la tangente au cercle au point B.
On désigne par D le pied de la hauteur issue de C du triangle (ACB).

1. Calculer les longueurs des segments [AD] et [DB].

2. Dans le triangle (ABC), justifier la relation

$$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{BD}\cdot\mathrm{BA}.$$

Dans le triangle (ABP), justifier la relation

$$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{CP}\cdot\mathrm{CA}.$$

En déduire la longueur du segment [CP].

3. Calculer la puissance du point P par rapport au cercle.
4. La perpendiculaire à (AC) en P coupe en M la droite (AB).
   Calculer la longueur du segment [CP].
5. Soit x la mesure en degrés de l'angle $\widehat{\text{CAB}}$.
   Trouver la valeur exacte de $\cos x$, puis la valeur approchée par défaut de x, à un degré près.