Brevet des collèges Paris septembre1974

Algèbre

On considère les fonctions polynômes p et q, définies par

$$p(x) = 3x^2 - 4x + 1 \quad \text{et} \quad q(x) = 3x + 1.$$

1. Calculer les nombres a, b et c tels que

$$a = p(1), \quad b = p\left(\frac{2}{3}\right) \quad \text{et} \quad c = p\left(1 - \sqrt{2}\right).$$

2. Sachant que $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$, encadrer le nombre c par deux décimaux dont la distance est un centième.
3. On considère la fonction numérique g : « p suivie de q ».
   Calculer $g(1)$ et $g\left(\frac{2}{3}\right)$, [c'est-à-dire $q(a)$ et $q(b)$].
   Exprimer $g(x)$.
   On trouvera que g est une fonction polynôme du second degré.

Exercice II

On considère maintenant les fonctions polynômes h et t définies par

$$\begin{aligned} h(x) &= 9x^2 - 12x + 4 \text{ et} \\ t(x) &= (3x-2)(1-x) - \left(\frac{2}{3}x - 3\right)(2-3x). \end{aligned}$$

1. Factoriser h et t ; on montrera que chacune d'elles est un produit de fonctions polynômes du premier degré.
2. Résoudre, dans l'ensemble des réels, les équations

$$h(x) = 1 \quad \text{et} \quad t(x) = 0.$$

Exercice III

Le plan est muni du repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On considère les points A, B et C définis par leurs coordonnées :

$$\text{A}(2\,;6), \quad \text{B}(1\,;-2) \quad \text{et} \quad \text{C}(8\,;2).$$

1. Placer ces points ; trouver les coordonnées du milieu, M, de [AC].

2. Calculer les coordonnées du point D, défini par

$$\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BM}$$

(c'est-à-dire que M est milieu de [BD]) et celles du point E défini par

$$\overrightarrow{CE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA}.$$

3. Calculer les distances BC, BM et MC (aucun calcul de valeur approchée n'est demandé).
En déduire que le triangle BMC est rectangle.
4. Montrer que le triangle EMD est rectangle et isocèle.
Donner, en degrés, les écarts angulaires de ses trois angles.
5. Montrer que les triangles AMB et CMB sont isométriques (on montrera qu'une symétrie, à préciser. les transforme l'un en l'autre).