∽ Brevet Paris–Créteil septembre 1978 ∾

Algèbre

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = 2(x+1)^2 - \left(x^2-1\right) - 3x - 3.$$

1. Factoriser $f(x)$.
   Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.
2. Soit l'inéquation $x(x+1) \geqslant 0$: la résoudre.
   a. dans $\mathbb{R}_+$ ensemble des nombres réels positifs ou nuls.
   b. dans $\mathbb{R}_-$ ensemble des nombres réels négatifs ou nul.
   Quel est l'ensemble des nombres réels x tels que $\sqrt{x(x+1)}$ existe ?
3. On suppose dans cette question que $x \geqslant 0$.
   Montrer que :
   $$x \leqslant \sqrt{x(x+1)} < x+1.$$
   en comparant x^2, $x(x+1)$ et $(x+1)^2$.
4. Comparer 55^2 et 3 080.
   Quelle est la racine carrée à une unité près par défaut de 3 080 ?
   On donnera un encadrement justifiant la réponse.
5. On cherche l'ensemble des entiers naturels x tels que $x(x+1) = 3080$, c'est-à-dire l'ensemble des entiers naturels x tels que
   $$\sqrt{x(x+1)} = \sqrt{3080}.$$
   Déduire des deux encadrements trouvés (celui de la question 3. et celui de la question 4.) l'unique valeur possible de x.
   Cette valeur convient-elle ?

Géométrie

Dans un plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, représenter les points suivants définis par leurs coordonnées :

$$\mathrm{A}(4\,;0), \quad \mathrm{B}(0\,;-4), \quad \mathrm{C}(10\,;-6), \quad \mathrm{I}(5\,;-5)$$

1. Montrer que le point I est le milieu du bipoint (B, C).
   Montrer que le triangle (A,B,C) est rectangle.
   Comparer les distances d(I, A), d(I, B), d(I, C).
2. On donne les points $\mathrm{B}'(0\,;+4)$, $\mathrm{C}'(10\,;+6)$.
   Montrer que les triangles (A, B, C) et (A, B′,C′) sont isométriques dans une isométrie s telle que $\mathrm{A} = s(\mathrm{A})$, $\mathrm{B}' = s(\mathrm{B})$, $\mathrm{C}' = s(\mathrm{C})$ que l'on précisera.
   Quelles sont les coordonnées du milieu I′ du bipoint (B′, C′) ?
3. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AI}'}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ sont orthogonaux ainsi que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{B}'\mathrm{C}'}$.
4. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre [BC].
   Montrer que A appartient à $\mathscr{C}$.
   Comparer les directions de la tangente en A à $\mathscr{C}$ et de la droite (B′C′).