

œ Brevet Paris septembre 1979 œ

ALGÈBRE

Exercice 1

La fonction polynôme f , de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , est définie par

$$f(x) = (6x + 1)^2 - (4x - 3)^2.$$

1. Développer, réduire et ordonner $f(x)$.

Calculer $f(0)$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ et $f(\sqrt{3})$.

En utilisant l'encadrement suivant :

$$1,732 < \sqrt{3} < 1,733,$$

encadrer $f(\sqrt{3})$ par deux nombres décimaux $a \cdot 10^p$ et $(a+1) \cdot 10^p$, $a \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{Z}$.

2. Montrer que, pour tout réel x ,

$$f(x) = 4(x+2)(Ax+B),$$

où A et B sont des entiers relatifs que l'on déterminera.

3. Résoudre, dans \mathbb{R} , puis dans \mathbb{Z} , l'équation

$$f(x) = 0.$$

Exercice 2

On considère les fonctions polynômes g , h et l , de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , définies par

$$\begin{aligned}g(x) &= 4x - 3, \\h(x) &= x^2 - 1, \\l(x) &= 12x - 11.\end{aligned}$$

1. Calculer, pour tout réel x ,

$$A(x) = 2g(x) + 4h(x) - l(x).$$

Montrer qu'il existe au moins une fonction affine p telle que l'on ait, pour tout réel x ,

$$A(x) = [p(x)]^p.$$

2. Calculer, pour tout réel x , $(g \circ h)(x)$ et $(h \circ g)(x)$.

GÉOMÉTRIE

Le plan euclidien étant muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , les points A, B, C et H sont définis par

$$\overrightarrow{OA} = 4\vec{i} + \vec{j}, \quad \overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + 7\vec{j}, \quad \overrightarrow{OC} = -2\vec{i} + 4\vec{j}, \quad \overrightarrow{OH} = 3\vec{i}.$$

1. Comparer les distances $d(H, A)$ et $d(H, B)$ et démontrer que les droites (HB) et (HA) sont orthogonales.

L'unité étant le degré, quel est l'écart angulaire de l'angle géométrique \widehat{HAB} ?

2. Démontrer qu'il existe un entier relatif k que l'on précisera tel que

$$\overrightarrow{HC} = k\overrightarrow{HA}.$$

En déduire $d(H, C)$.

On désigne par x l'écart angulaire, l'unité étant le degré, de l'angle géométrique \widehat{HBC} ; calculer $\tan x$; en utilisant une table de rapports trigonométriques, encadrer x par deux entiers consécutifs.

3. On désigne par I le centre du cercle circonscrit au triangle (H, B, C).

Quelles sont les coordonnées de I?

Ce cercle rencontre l'axe (O, \vec{j}) en H et en K; quelles sont les coordonnées de K?