Brevet Paris septembre 1980

Algèbre

On considère les fonctions polynômes f et g,de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définies par

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x^2+3\right)(x-2)-\left(x^2-4x+4\right)(x+2) \\ g(x) &= (2x+3)^2-(x+5)^2 \end{aligned}$$

1. **a.** Démontrer que 1 est une fonction affine. La représenter graphiquement.
   b. Écrire $g(x)$ sous la forme d'un produit de deux facteurs du type $ax+b$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$.
   c. Résoudre, dans $\mathbb{R}$ les équations

$$f(x) = 7, \qquad g(x) = 0.$$

2. La fonction q, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, est donnée par

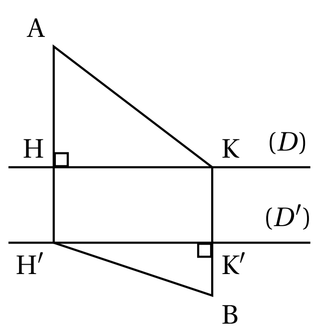
$$q(x) = \frac{g(x)}{(3x+8)(2x-1)}.$$

   a. Quel est l'ensemble de définition, $\mathcal{D}$, de q ?
   b. Simplifier, pour tout réel x de $\mathcal{D}$, l'écriture de $q(x)$.
   c. Calculer $q\left(\sqrt{2}\right)$. (On donnera ce résultat sous la forme d'un quotient de dénominateur entier et positif.)
   En utilisant l'encadrement suivant de $\sqrt{2}$: $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$, trouver les intervalles de la forme

$$\left[a \cdot 10^p\ ;\ (a+1) \cdot 10^p\right[,\ a \in \mathbb{Z},\ p \in \mathbb{Z}_{-}\{0\}$$

   qui contiennent $7 \cdot q\left(\sqrt{2}\right)$.

Géométrie



Pour aller d'un point A à un point B situés, comme l'indique la figure ci-dessus, de part et d'autre d'une avenue représentée par la bande que définissent les droites parallèles (D) et (D'), un piéton doit utiliser un passage protégé de direction orthogonale à celle de (D) et de (D'). (Tous les éléments de la figure sont dans un même plan P.)

On désigne par H l'image de A dans la projection orthogonale de P sur (D). On désigne par H$'$ l'image de A dans la projection orthogonale de P sur (D').
On désigne par K l'image de B dans la projection orthogonale de P sur (D). On désigne par K$'$ l'image de B dans la projection orthogonale de P sur (D').
On donne, en mètres, les distances suivantes :

$$d(\text{A, H}) = 30,\quad d(\text{H, H'}) = 20\ ,\quad d(\text{H, K}) = 40,\quad d(\text{B, K}') = 10.$$

1. Si le passage est représenté par le segment [H, H$'$], quelle est la distance parcourue par le piéton qui suit alors le trajet [A, H, H$'$, B] ?
2. Si le passage est représenté par le segment [K, K$'$], quelle distance parcourt-il ?
3. On désigne par C l'image du point A dans la translation de vecteur $\overrightarrow{\text{HH}'}$.
   La droite (CB) coupe la droite (D') en M$'$. Construire le point M tel que le quadruplet (A, C, M$'$, M) soit un parallélogramme.
   Démontrer que M appartient à la droite (D).
   Si le passage est représenté par le segment [MM$'$], quelle distance le piéton parcourt-il en suivant le trajet [A, M, M$'$, B] ?
4. Comparer les trois trajets précédents.
   (**N. B.** : $\sqrt{2} < 1,5$ et $\sqrt{7} > 4$.)

N. B. - L'utilisation des calculatrices électroniques n'est pas autorisée.