∽ Brevet d'Études du Premier Cycle ∾

Poitiers juin 1960

ENSEIGNEMENT LONG

ALGÈBRE

On donne les quatre polynômes suivants :

$$\begin{aligned} A &= x^2 + xy - x,\\ B &= x^2 - xy + x,\\ C &= x^2 - y^2 + 2y - 1,\\ D &= x^2 + 2xy - 2x + y^2 - 2y + 1.\end{aligned}$$

1. Calculer la valeur de chacun de ces polynômes pour $y = 2a + 1$, a étant un nombre algébrique donné différent de $-\dfrac{1}{2}$.
Écrire les résultats sous forme de produits de facteurs du premier degré en x.

2. Calculer les quotients $q = \dfrac{A}{B}$ et $q' = \dfrac{C}{D}$ (on trouvera $q = \dfrac{x+2a}{x-2a}\Big)$.
Quelle relation indépendante de x existe-t-il entre q et q' ?
Comment nomme-t-on un couple de nombres tels que q et q' ?

3. Dans tout ce qui va suivre on supposera $a = 1$.

a. Calculer dans ces conditions la valeur x_1 de x pour que $q = 3$.

b. Calculer la valeur x_2, de x pour que $q = \dfrac{1}{3}$.

c. Quelle relation existe-t-il entre x_1 et x_2 ?
Comment nomme-t-on un couple de nombres tels que x_1 et x_2 ?

d. Calculer de même les valeurs x' et x'' de x quand q vaut $\sqrt{3}$, puis $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

GÉOMÉTRIE

On donne un segment [AB] tel que AB = $2a$ de milieu O.
On construit les demi-droites Ax et By perpendiculaires à la droite (AB) et d'un même côté.
On marque sur Ax un point C et, sur By, le point D tel que

$$\text{AC} \times \text{BD} = \text{OA}^2.$$

1. Démontrer que les triangles ACO et OBD sont semblables.
En déduire que l'angle $\widehat{\text{COD}}$ est droit.

2. Démontrer que les triangles COD et CAO sont semblables.
En déduire que CO est bissectrice de l'angle $\widehat{\text{ACD}}$.

3. On suppose désormais que AC = AB.
Calculer les longueurs des côtés et des diagonales du trapèze ACDB.

4. Toujours avec l'hypothèse AC = AB, on trace les diagonales du trapèze, qui se coupent en I, et l'on mène par I la parallèle aux bases du trapèze coupant (AB) en E et (CD) en F.
Démontrer que I est équidistant des points E et F.