

∞ Brevet des collèges Poitiers juin 1973 ∞

Algèbre

Soit les fonctions polynômes définies dans \mathbf{R} par

$$\begin{aligned} f(x) &= (5x-4)^2 - (1-3x)^2 \text{ et} \\ g(x) &= 4x^2 + 9 - 12x + 3(2x-3)(2-x) - 2(2x-3). \end{aligned}$$

1. Écrire $f(x)$ et $g(x)$ sous forme de polynômes réduits et ordonnés.
2. Écrire $f(x)$ et $g(x)$ sous forme de produits de polynômes du premier degré.
3. Déterminer $f(0)$, $f(\sqrt{3})$, $g(0)$ et $g(\sqrt{3})$.
4. Trouver l'ensemble des solutions de l'équation définie par

$$x \in \mathbf{R} : f(x) = g(x).$$

5. Soit h la fonction rationnelle de \mathbf{R} sur \mathbf{R} définie par

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

- a. Déterminer le domaine (ou ensemble) de définition, \mathcal{D} , de h .
- b. Soit k la fonction rationnelle de \mathbf{R} sur \mathbf{R} définie par

$$k(x) = \frac{8x-5}{1-x}.$$

Quel est son domaine de définition, \mathcal{D}' ?

Pour quelles valeurs de x a-t-on $h(x) = k(x)$?

- c. Résoudre, dans \mathcal{D} , les équations

$$h(x) = 0 \quad \text{et} \quad h(x) = -14.$$

Géométrie

Dans un plan (P) muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) on considère les points A, B et C définis par

$$\vec{OA} = -2\vec{i} + 5\vec{j}, \quad \vec{OB} = 5\vec{i} + 2\vec{j}, \quad \vec{OC} = 7\vec{i} - 3\vec{j}.$$

1. Donner les coordonnées de A, de B et de C.
Quelles sont les coordonnées de M, milieu du bipoint (A, C) ainsi que celles du milieu de (O, B)?
Montrer que (O, A, B, C) est un parallélogramme.

2. Calculer les distances $d(O, B)$, $d(O, C)$ et $d(B, C)$.
Démontrer que le triangle (OBC) est rectangle isocèle.
3. Soit H la projection orthogonale du point B sur (OC) .
Montrer que H est le milieu de (O, C) .
Donner ses coordonnées.
4. Montrer que les droites (MH) et (BC) sont parallèles.
5. Les droites (MH) et (AB) sont sécantes en I .
Montrer que I est le milieu de (A, B) .