

∞ Brevet des collèges Poitiers juin 1974 ∞

ALGÈBRE

Soit f et g les fonctions polynômes suivantes, définies par et

$$\begin{aligned} f: \mathbf{R} & \rightarrow \mathbf{R}, \\ x & \mapsto f(x) = 36x^2 - 24x \\ g: \mathbf{R} & \rightarrow \mathbf{R}, \\ x & \mapsto g(x) = 9x^2 + 4 - 12x \end{aligned}$$

1. Écrire chacune de ces fonctions polynômes sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré.
2. Quels sont les ensembles de définition \mathcal{D}_f et \mathcal{D}_g , des fonctions f et g ?
3. Résoudre dans \mathbf{R} les équations $f(x) = 0$ et $g(x) = 1$.
4. Les fonctions f et g sont-elles des applications ou des bijections? Expliquer.
5. Résoudre dans \mathbf{R} l'équation $f(x) = g(x)$.
6. Soit h la fonction rationnelle définie par

$$\begin{aligned} h: \mathbf{R} & \rightarrow \mathbf{R}, \\ x & \mapsto h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}. \end{aligned}$$

Quel est son ensemble de définition \mathcal{D}_h ?

7. Démontrer que $h(x)$ est égal à $h'(x) = \frac{3x-2}{-12x}$ pour tout élément x de \mathcal{D}_h .

Calculer $h(2)$, puis $h\left(-\frac{1}{6}\right)$.

8. Résoudre dans \mathcal{D}_h l'équation $h(x) = 0$.

GÉOMÉTRIE

Dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère les points A, B et C définis par

$$\vec{OA} = -\vec{i} + \vec{j}, \quad \vec{OB} = 3\vec{i} + 3\vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{OC} = 2\vec{i}.$$

1. Placer les points A, B et C.
Calculer les coordonnées du milieu M du segment [AB].
2. Calculer les coordonnées du point D tel que le quadruplet (A, B, C, D) soit un parallélogramme.

3. Montrer que les droites (CM) et (AB) sont orthogonales et que (MC) est la médiatrice du segment [AB].
Calculer $d(B, C)$.
En déduire $d(A, C)$ et $d(A, D)$.
4. Calculer les coordonnées du point E symétrique de C par rapport à M.
Montrer que le quadruplet (A, E, B, C) est un carré.
5. Montrer que les points D, O et B sont alignés.