

∞ Brevet des collèges Poitiers juin 1975 ∞

Algèbre

Soit les deux applications f et g définies dans \mathbf{R} par

$$\begin{aligned}f(x) &= x^2 + 4 + 4x, \\g(x) &= (2x - 1)^2 - (x - 3)^2\end{aligned}$$

1. Écrire $f(x)$ et $g(x)$ sous forme de produits de facteurs du premier degré.
2. Soit $N(x) = f(x) - 2g(x)$ et $D(x) = f(x) + g(x)$.
Factoriser $N(x)$ et $D(x)$.
3. Résoudre les équations :

$$N(x) = 0 \quad \text{et} \quad D(x) = 0.$$

4. On considère la fonction rationnelle p définie dans \mathbf{R} par :

$$p(x) = \frac{N(x)}{D(x)}.$$

- a. Quel est son domaine de définition \mathcal{D} ?
- b. Montrer que $p(x)$ peut s'écrire dans \mathcal{D} : $\frac{5(2-x)}{2(2x-1)}$.
- c. Résoudre dans \mathcal{D} les équations

$$p(x) = 1 \quad \text{et} \quad p(x) = -2.$$

- d. Calculer $p(\sqrt{2})$ et donner le résultat sous la forme d'un quotient dont le dénominateur est entier.

Géométrie

Dans le plan rapporté au repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) on donne les points

$$A(-2; 7), \quad B(-5; -2), \quad C(7; -2), \quad D(1; 4)$$

En déduire que les points A, D, C sont alignés. Montrer que le triangle (A, D, B) est rectangle en D.

1. Déterminer les composantes des vecteurs \overrightarrow{AD} , \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{BD} .
2. Déterminer la fonction affine représentée graphiquement par la droite (BD).
La parallèle à l'axe des ordonnées passant par A coupe (BD) au point H.
Quelles sont les coordonnées de H ?
Montrer que H est le milieu de BD.

3. Trouver les coordonnées $(x; y)$ du point G tel que :

$$3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

4. I est le point d'abscisse(+ 1) sur la droite (HG).
Quelle est l'ordonnée de I ?
Montrer que I est le centre du cercle passant par les points A, B, et C.