∽ Brevet Poitiers juin 1977 ∾

Algèbre

(Les parties A et B sont indépendantes).

Exercice A -

Soit f et g les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies de la façon suivante :

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x+5)^2-(x+3)^2 \\ g(x) &= (x+2)(2x-1)-(x+2)(x-5) \end{aligned}$$

1. Écrire $f(x)$ et $g(x)$ sous la forme d'un produit de deux polynômes du premier degré.
2. Soit h la fonction rationnelle suivante :

$$x \longmapsto h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

   a. Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de h.

   b. Démontrer que dans $\mathcal{D}$, $h(x)$ peut s'écrire $\dfrac{3x+8}{x+4}$.

Exercice B -

Soit F l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par les conditions :

$$\begin{aligned} F(x) &= 2x+2 \quad \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ F(x) &= 2 \qquad\quad \text{si} \quad x < 0 \end{aligned}$$

1. Faire la représentation graphique de l'application F dans le plan muni d'un repère orthonormé (l'unité de longueur est deux centimètres).
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les trois équations suivantes :

   a. $F(x) = 3$.

   b. $F(x) = -2$.

   c. $F(x) = 2$.
3. Utiliser la représentation graphique de F pour résoudre les trois équations précédentes.

Géométrie

(Les exercices A et B sont indépendants).

Exercice A -

Le plan est rapporté à un repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Soit A, B et C trois points définis de la façon suivante :

$$\overrightarrow{\text{OA}} = -2\vec{\imath} + \vec{\jmath}, \quad \overrightarrow{\text{OB}} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}, \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{OC}} = 4\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}.$$

1. Démontrer que le quadruplet (O, A, B, C) est un parallélogramme.

2. Soit D l'image du point C dans la translation de vecteur AB. Quelles sont les coordonnées du point D ?
3. Soit E l'image du point 0 dans III symétrie de centre A Quelles sont les coordonnées du point E ?
4. Démontrer que les points E, B et D sont alignés.

Exercice B -
Dans un plan, on considère un rectangle (A, B, C, D) tel que les distances AB = DC = 8 et AD = BC = 2. (L'unité de longueur choisie est le centimètre).
Soit E le point de la droite (BC) tel que la distance CE = 6 (le point C est situé entre B et E).

1. Calculer la distance DE.
2. Soit O le milieu du bipoint (A, B).
   Calculer les distances OD et OE ; en déduire que le triangle (O, D, E) est rectangle en O.
3. Soit I le centre du cercle de diamètre [D, E].
   Démontrer que ce cercle passe par O et que la droite (AB) est tangente à ce cercle.