Brevet des collèges Poitiers septembre1974

Algèbre

On considère les fonctions polynômes définies dans **R** par

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-3)(x-1)+x^2-9 \\ g(x) &= (x-3)^2-(x-5)(2x-6)-(3x-9). \end{aligned}$$

1. Écrire $f(x)$ et $g(x)$ sous forme de produits de polynômes du premier degré.
2. Résoudre dans **R** les équations suivantes :
   a. $g(x)=0$,
   b. $f(x)=g(x)$.
3. Soit h la fonction rationnelle de **R** vers **R** définie par

$$h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}.$$

   Déterminer l'ensemble de définition, $\mathcal{D}$, de h.
   Montrer que $h(x)$ est égale à $h'(x)=\dfrac{2(x+1)}{-x+4}$ pour tout élément x de $\mathcal{D}$.
4. Construire dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ les représentations graphiques (D_1) et (D_2) des fonctions affines définies par

$$f_1(x)=-2x-2 \quad \text{et} \quad f_2(x)=x+4.$$

5. Lire, sur le graphique, les coordonnées du point J, intersection des droites (D_1) et (D_2).
   Vérifier ce résultat par le calcul.

Géométrie

Dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère les points A et B définis par

$$\overrightarrow{\text{OA}}=3\vec{\imath}+2\vec{\jmath} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{OA}}=-2\vec{\imath}-3\vec{\jmath}.$$

1. Calculer les coordonnées du milieu, I, du bipoint (A, B).
2. On considère le cercle $(\mathcal{C})$ de centre I, qui passe par les points A et B.
   Quel est le rayon de ce cercle ?
3. Soit M le point du plan défini par

$$\overrightarrow{\text{OM}}=3\vec{\imath}-3\vec{\jmath}.$$

   Calculer la distance $d(\text{I, M})$ (ou IM).
   Le point M est-il situé sur le cercle $(\mathcal{C})$?
4. Montrer que les droites (IM) et (AB) sont perpendiculaires et que le triangle AMB est rectangle en M.
5. Quelle est la fonction affine représentée par la droite (AB) ?
   Quelle est la fonction affine représentée par la tangente en M au cercle $(\mathcal{C})$?