∽ Brevet Polynésie juin 1979 ∾

Algèbre

1. Soit A l'application, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$A(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}.$$

a. Factoriser A(x).

b. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $A(x) = 0$.

c. L'application A est-elle une bijection ? Pourquoi ?

2. Soit B l'application, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$B(x) = ax^2 + bx + 1.$$

a. Déterminer les réels a et b sachant que $B(1) = 0$ et $B(2) = 1$.

b. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $\sqrt{B(x)} = 2$.

3. Soit h la fonction, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$h(x) = \frac{A(x)}{x+1} - \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}.$$

a. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_h$ de cette fonction, puis simplifier $h(x)$.

b. Calculer $h\left(\sqrt{3}\right)$.

c. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $h(x) = -\dfrac{5}{3}$.

4. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, construire la représentation graphique de l'application f définie dans $\mathbb{R}$ par

$$\begin{array}{lll} f(x) = 3 - 2x & \text{pour} & x < 1 \\ f(x) = 1 & \text{pour} & 1 \leqslant x \leqslant 3, \\ f(x) = x - 2 & \text{pour} & x > 3 \end{array}$$

Géométrie

Dans un plan euclidien muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère les points

$$\mathrm{A}(-2\,;\,5), \qquad \mathrm{B}(-1\,;\,-2) \quad \text{et} \quad \mathrm{C}(3\,;\,0).$$

1. Calculer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$, puis les normes de ces trois vecteurs.

Que peut-on en conclure pour le triangle (A, B, C) ?

2. Calculer les coordonnées du milieu M de (A, B) et du milieu N de (A, C).

Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$?

3. On donne $\overrightarrow{OD} = x\overrightarrow{\imath} + 6\overrightarrow{\jmath}$.

   Déterminer le réel x de sorte que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ soient orthogonaux.

   Démontrer que, lorsque x a la valeur ainsi trouvée, D appartient au cercle de centre A et de rayon AB.

4. Soit E l'image de A dans la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

   Calculer les coordonnées de E.

   Calculer les coordonnées du point d'intersection des droites (AC) et (BE).