∽ Brevet Polynésie septembre 1978 ∾

Algèbre

On considère les applications f et g définies dans $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} f(x) &= (3x-2)(5x+6)+3(4-6x) \text{ et} \\ g(x) &= (4x-3)^2-\left(x^2-2x+1\right). \end{aligned}$$

1. Développer, réduire et ordonner $f(x)$ et $g(x)$.

2. Ecrire $f(x)$ sous la forme de produits de facteurs du premier degré,

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = g(x)$.

4. Soit h la fonction rationnelle définie par :

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

a. Donner son ensemble de définition $\mathcal{D}_h$, puis simplifier $h(x)$.

b. Calculer $h\left(\dfrac{2}{15}\right)$, $h\left(2-\sqrt{2}\right)$ et donner de ce dernier résultat la valeur approchée par défaut à 10^{-2} près, sachant que $1,414 < \sqrt{2} < 1,45$.

Géométrie

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on donne les points

$$\text{A}(-4\,;\,0)\,;\quad \text{B}(3\,;\,1)\,;\quad \text{C}(6\,;\,4)\,;\quad \text{D}(-1\,;\,3)$$

1. Montrer que (A, B, C, D) définit un parallélogramme.
Déterminer les coordonnées de son centre de symétrie I.

2. Démontrer que le triangle (O, B, D) est un triangle rectangle isocèle.

3. Déterminer les coordonnées du point E tel que $\overrightarrow{\text{OE}} = \dfrac{4}{5}\overrightarrow{\text{OB}} + \dfrac{7}{5}\overrightarrow{\text{OD}}$.
On trouve E(1 ; 5).

4. Montrer que les points D, A, E sont alignés.

5. Déterminer les coordonnées du point G tel que $2\overrightarrow{\text{GA}} - \overrightarrow{\text{GC}} = 2\overrightarrow{\text{CE}}$. On trouve G(−4 ; −6).

6. Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre O et de rayon OA. Il recoupe l'axe des abscisses en A′.

a. Montrer que (GA) est tangente du cercle $(\mathcal{C})$.

b. La droite (GA′) coupe $(\mathcal{C})$ en M.
Quelle est la nature du triangle (A, M, A′) ?