∽ Brevet Reims juin 1980 ∾

ALGÈBRE

Soit f et g les fonctions polynômes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x^2 - 12x,\\ g(x) &= (x-3)(5x-3)-(2x+5)(3-x)-(2x-6)(2x-1). \end{aligned}$$

1. Mettre $f(x)$ et $g(x)$ sous forme de produits de facteurs du premier degré.
2. On désigne par $F(x)$ la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

   Après avoir précisé le domaine de définition, simplifier $F(x)$.
3. Soit g et h les applications définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 4x \quad \text{et} \quad h(x) = 3x+4.$$

   a. Calculer pour tout x réel, $g \circ h(x)$ et $h \circ g(x)$, puis l'image de $-\dfrac{4}{3}$ par $g \circ h$.

   b. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_{F'}$ de la fonction rationnelle .

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{F'} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \frac{4x}{3x+4} \end{aligned}$$

   puis résoudre, dans $\mathbb{R}$ l'équation $F'(x) = 1$.

   c. Représenter graphiquement dans un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ les fonctions g et h puis, retrouver graphiquement la solution de l'équation $F'(x) = 1$.

GÉOMÉTRIE

On donne un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ du plan P.

1. Construire les points D, E, F et G tels que

$$\overrightarrow{\text{OD}} = -\vec{u} - 2\vec{v}, \quad \overrightarrow{\text{OE}} = -3\vec{u}, \quad \overrightarrow{\text{OF}} = 2\vec{u} - \vec{v}, \quad \text{et } \overrightarrow{\text{OG}} = 4\vec{u} - 3\vec{v}$$

2. Quelle est la nature du quadruplet (E, D, G, F) ?
3. **a.** Calculer les distances $d(\text{O, D})$ et $d(\text{O, F})$.

   b. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{\text{OD}}$ et $\overrightarrow{\text{OF}}$ sont orthogonaux.

   c. En déduire la nature du triangle (O, D, F).
4. Expliquer pourquoi le point $\text{I}\left(\dfrac{1}{2}~;~-\dfrac{3}{2}\right)$ est le centre d'un cercle passant par les points O, D et F, puis calculer le rayon de ce cercle.

5. Soit le point K tel que

$$\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OG}.$$

   Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{OK}$.
   Montrer que les points O, I et K sont alignés.

6. Soit le point L tel que $\overrightarrow{OL} = 3\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.
   Démontrer que la droite (OL) est la tangente en O au cercle de centre I et de rayon (I, O).