∽ Brevet Reims juin 1981 ∾

Algèbre

Exercice 1

Développer $\left(4-3\sqrt{2}\right)^2$.
Déterminer le plus grand des deux réels 4 et $3\sqrt{2}$.
En déduire l'écriture, au moyen d'un seul radical de $\sqrt{34-24\sqrt{2}}$.

Exercice 2

On considère la fonction polynôme P définie par

$$P(x) = (2x-1)(x+5) - \left(4x^2-1\right).$$

1. Développer, réduire et ordonner $P(x)$.
2. Factoriser $P(x)$.
3. Calculer $P\left(\dfrac{5}{4}\right)$, $P(0)$, $P\left(\dfrac{13}{4}\right)$.
   P est-elle une bijection ?
4. Soit F la fonction rationnelle de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, définie par

$$F(x) = \frac{P(x)}{(-x+4)(2x+5)}.$$

   a. Déterminer l'ensemble de définition D, de F.
   b. Simplifier $F(x)$ pour x appartenant à D.
   c. Calculer $F\left(\sqrt{2}\right)$. Rendre rationnel le dénominateur de ce quotient.
   d. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $F(x) < 0$.

Géométrie

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On considère les points A, B, C et D définis par

$$\text{A}(-1\,;\,1),\qquad \text{B}(-1\,;\,-4),\qquad \text{C}(3\,;\,-1),\qquad \text{D}(-5\,;\,-2).$$

1. Démontrer que (A, D, B, C) est un parallélogramme.
2. Soit K le milieu de [AC]. Déterminer les coordonnées de K.
3. Montrer que $\overrightarrow{\text{AK}}$ est orthogonal à $\overrightarrow{\text{BK}}$.
   Que peut-on en conclure pour le triangle (A. B, C) ?
4. Déterminer les coordonnées du centre R du cercle $\mathscr{C}$ qui passe par A, K et B.
5. Soit K′ l'image de K par la symétrie centrale de centre R : S_{R}.
   Quelles sont les coordonnées de K′ ?
6. Soit R′ la projection orthogonale de R sur (BK).
   Démontrer que $\overrightarrow{\text{RR}'} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{K}'\text{B}}$.