Brevet des collèges Rennes juin 1973

Algèbre

1. On considère l'application f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par

$$f : x \longmapsto f(x) = \frac{1}{9}x^2 - 4.$$

  a. Déterminer les images, par f, des nombres réels suivants :

$$-3, \quad \sqrt{2} - 3 \quad \text{et} \quad 3 \cdot 10^{-1}$$

  b. Déterminer les nombres réels, s'ils existent, ayant pour image, par f, les nombres

$$-3, \quad -4 \quad \text{et} \quad -5.$$

  c. L'application f est-elle une bijection ?

2. On considère l'application g de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par

$$g : x \longmapsto g(x) = \frac{4}{3}x + 10.$$

  a. Déterminer l'application $\left(f + \frac{1}{2}g\right)$ qui à x associe $f(x) + \frac{1}{2}g(x)$.

  Écrire $f(x) + \frac{1}{2}g(x)$ sous forme d'un polynôme réduit et ordonné et sous forme factorisée.

  b. Déterminer l'application composée $h = f \circ g$ (g suivie de f) en écrivant $h(x)$ sous forme d'un polynôme réduit et ordonné et sous forme d'un produit de facteurs du premier degré.

Géométrie

Dans le plan euclidien, muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère les points A, B et C définis par leurs coordonnées

$$\text{A}(3\,;\,0), \quad \text{B}(6\,;\,3) \quad \text{et} \quad \text{C}\left(-\frac{3}{2}\,;\,\frac{9}{2}\right).$$

1. **a.** Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ en fonction des vecteurs de base $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$, puis le vecteur $\overrightarrow{\text{AC}}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}$.

  b. En déduire que les points A, B et C sont alignés.

2. Déterminer les coordonnées du milieu, M, du bipoint (B, C), puis celles du point D symétrique du point O par rapport au point M.

  Quelle est la nature du quadruplet (O, B, D, C) ?

3. Calculer les distances d(O, C), d(O, D) et d(C, D).

  En déduire la nature du triangle (O, C, D).

4. Soit I la projection orthogonale de O sur la droite (CD).
   Que représente la droite (OI) pour le segment [CD] ? Déterminer les coordonnées du point I.
5. **a.** Démontrer que les points C, O, A et D appartiennent au cercle de centre I et de rayon $d(\text{I, O})$.
   b. Démontrer que la droite (OB) est la tangente en O à ce cercle.