∽ Brevet Rennes juin 1976 ∾

Algèbre

On considère les deux fonctions polynômes f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x^2-9-(4x+6)(3x-1)\\ g(x) &= (3x+5)^2-(x+2)^2. \end{aligned}$$

1. Développer. réduire et ordonner $f(x)$ et $g(x)$ suivant les puissances décroissantes de x.
2. Mettre $f(x)$ et $g(x)$ sous la forme de produits de facteurs du premier degré.
3. Calculer $g\left(-\dfrac{3}{2}\right)$, $g\left(-\dfrac{7}{4}\right)$ et $g\left(\sqrt{3}\right)$.
   Montrer que g n'est pas une bijection.
4. Soit la fonction rationnelle F définie par

$$F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}.$$

   a. Déterminer l'ensemble de définition, $\mathcal{D}$, de F.
   b. Dans $\mathcal{D}$, simplifier $F(x)$.

5. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

$$F(x)=0 \quad \text{et} \quad F(x)=-\frac{2}{3}$$

6. Calculer $F\left(\sqrt{3}\right)$.
   Donner ce résultat sous la forme d'un quotient dont le dénominateur est entier.

Géométrie

(**N. B. -** Les parties A et B peuvent être traitées dans un ordre indifférent.)
Soit dans le plan euclidien $\mathcal{P}$, trois points A, B et C non alignés, O le milieu de (B, C), (Δ) la perpendiculaire en O à (BC) et $\left(\Delta'\right)$ la médiatrice de (A, C).

Partie A

1. Faire un dessin.
2. Montrer que (Δ) et $\left(\Delta'\right)$ sont sécantes.
3. Quelle propriété le point de concours de (Δ) et $\left(\Delta'\right)$ possède-t-il relativement aux points A, B et C ?

Partie B

1. On suppose de plus que dans le repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ de $\mathcal{P}$, on a le point I tel que $\overrightarrow{\text{OI}}=\vec{\imath}$, le point J tel que $\overrightarrow{\text{OJ}}=\vec{\jmath}$ et que $\overrightarrow{\text{OC}}=3\vec{\imath}$, et $\overrightarrow{\text{OA}}=\vec{\imath}+4\vec{\jmath}$.

a. Faire un dessin répondant aux conditions ainsi décrites.
(Ce dessin sera complété au cours des questions suivantes).

b. Déterminer les coordonnées des points C, A et B.

2. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, telle que dans $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ tout point M$(a\ ;\ b)$ a pour image M$' = f(\text{M})$, avec M$'\left(a'\ ;\ b'\right)$ et

$$\left\{\begin{array}{rcl} a' & = & -b+1,\\ b' & = & -a+1.\end{array}\right.$$

a. Déterminer les coordonnées de A$'$, B$'$ et C$'$ images respectives de A, B et C par f.

b. Déterminer les points dont A, B et C sont les images par f.

c. Montrer qu'une équation de (IJ) est $y = -x+1$.
Soit N le milieu de (M, M$'$).
Montrer que les coordonnées de N sont $\left(\dfrac{a-b+1}{2}\ ;\ \dfrac{b-a+1}{2}\right)$ et que N appartient à (IJ).

d. Démontrer que $\overrightarrow{\text{MM}'} = (1-a-b)\overrightarrow{\imath} + (1-a-b)\overrightarrow{\jmath}$ et que $\overrightarrow{\text{MM}'}$ est orthogonal à $\overrightarrow{\text{IJ}}$.

e. Déduire de d. et e. que f est une isométrie de $\mathscr{P}$.
Quel nom donne-t-on à cette isométrie ?