∽ Brevet Rennes septembre 1976 ∾

ALGÈBRE

On considère les applications f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & -3(x-2) \text{ et} \\ g(x) & = & x^2-4. \end{array}$$

Partie A

1. Calculer $f(5)$, $g\left(\frac{2}{3}\right)$ et $g\left(-\frac{2}{3}\right)$.
2. g est-elle ou non une bijection ?
   Justifier la réponse.
3. Encadrer $g\left(\sqrt{5}-2\right)$ sachant que $2,23 < \sqrt{5} < 2,24$.

Partie B

1. Déterminer et développer le polynôme

   $$N(x) = (g \circ f)(x).$$

   En remarquant que $(g \circ f)(x)$ est une différence deux carrés, mettre le polynôme $N(x)$ sous forme d'un produit de deux facteurs du premier degré.
2. Déterminer et développer le polynôme

   $$D(x) = \frac{10}{3} f(x) + 3g(x).$$

   Factoriser $D(x)$,

Partie C

On considère la fonction rationnelle p de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $p(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)}$.

1. Quel est son ensemble de définition $\mathscr{D}$?
2. Montrer que $p(x)$ peut s'écrire, dans $\mathscr{D}$, $\dfrac{8-3x}{2-x}$.
3. Résoudre dans $\mathscr{D}$, les équations

   $$p(x) = 5 \quad \text{et} \quad p(x) = -6.$$

GÉOMÉTRIE

Dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ on trace le cercle $(\mathscr{C})$ de centre O de rayon 2.

1. Démontrer que le point $A\left(-1\ ;\ \sqrt{3}\right)$ appartient au cercle $(\mathscr{C})$.
   Existe-t-il un point autre que A d'abscisse -1, appartenant au cercle $(\mathscr{C})$?
2. Soit $x'x$ la droite dont un repère cartésien est $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath}\right)$ et $y'y$ la droite dont un repère cartésien est $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.
   La droite dont une équation est $x - y = 0$, coupe le cercle $(\mathscr{C})$ en deux points B et B$'$, le point B étant le point d'abscisse positive.
   Soit H la projection orthogonale de B sur la droite $x'x$.
   a. Déterminer les coordonnées du point B.
   En déduire l'écart angulaire de l'angle géométrique $\widehat{\mathrm{BOH}}$.
   Quelles sont les coordonnées du point B$'$?
   b. Soit H$'$ la projection orthogonale de B$'$ sur la droite $x'x$.
   Montrer que le quadruplet (B, H, B$'$, H$'$) est un parallélogramme.
   c. Soit K le point défini par $\overrightarrow{\mathrm{KB}} = -2\overrightarrow{\mathrm{KH'}}$.
   Calculer les coordonnées du point K.
   En déduire que la droite (OK) est orthogonale à la droite (OB).
   Déterminer une équation de la droite (OK).
   On désigne par K$'$, le symétrique de K par rapport au point O.
   Montrer que les points B$'$, K$'$ et H sont alignés.