Brevet Rouen juin 1979

Algèbre

On considère la fonction polynôme f définie par

$$f(x) = (2x+1)^2 - (3-x)^2.$$

1. Développer, réduire et ordonner $f(x)$.
2. Écrire $f(x)$ sous forme d'un produit de facteurs du premier degré.
3. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = -8$.
4. On considère la fonction rationnelle h définie par

$$h(x) = \frac{f(x)}{(3x-2)(2x+3)}.$$

   a. Déterminer $\mathcal{D}_h$, l'ensemble de définition de la fonction h.
   Montrer que pour tout élément x de $\mathcal{D}_h$ on peut écrire

$$h(x) = \frac{x+4}{2x+3}.$$

   b. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations

$$h(x) = 1, \qquad h(x) = \frac{4}{3}.$$

   c. Calculer $h\left(\sqrt{2}\right)$.
   Écrire celte expression de façon à ne plus avoir de radical au dénominateur.
   Sachant que $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$, déterminer un encadrement de $h\left(\sqrt{2}\right)$.
   En déduire la valeur approchée à 10^{-1} par défaut de $h\left(\sqrt{2}\right)$.

5. Soit g_1 et g_2 les fonctions affines, de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, définies par

$$g_1(x) = x+4, \qquad g_2(x) = 2x+3.$$

   Représenter graphiquement g_1 et g_2 dans le plan rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'axes Ox et Oy.
   Calculer les coordonnées du point d'intersection E de ces deux représentations.
   Expliquer comment on peut vérifier graphiquement la solution de l'équation $h(x) = 1$ du **4. b.**

Géométrie

Soit le plan euclidien muni du repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Soit les points

$$\text{A}(-2\,;\,-2), \qquad \text{B}(-4\,;\,4), \qquad \text{C}(2\,;\,6) \quad \text{et} \quad \text{D}(4\,;\,0).$$

Faire la figure.

1. Calculer les distances d(A, D) et d(A, B).
2. Montrer que l'on a (AB)$\perp$ (AO).
3. Démontrer que (A, B, C, D) est un carré.
   Quelles sont les coordonnées du point d'intersection I des diagonales ?
   Que peut-on dire du triangle (A, B, D) ?
4. Soit la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$:

$$\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{\imath} - 2\overrightarrow{\jmath}.$$

   Dans cette translation, A a pour image E.
   Démontrer que le couple des coordonnées de E est $(0~;~-4)$.
5. Calculer les coordonnées du centre K du cercle circonscrit $\mathscr{C}$ au triangle (B, I, A).
   Soit $\text{G}(-6~;~2)$.
   Démontrer que G appartient à ce cercle $\mathscr{C}$.