Brevet des collèges Rouen juin 1974

ALGÈBRE

1. Soit f et g les applications polynômes suivantes :

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbf{R} & \rightarrow & \mathbf{R}, \\ & x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{19}{4}x^2 - 14x + 16, \text{ et} \\ g: & \mathbf{R} & \rightarrow & \mathbf{R}, \\ & x & \longmapsto & g(x) = \dfrac{1}{4}x^2 + 2x - 3. \end{array}$$

a. Calculer $f(0)$, $g\left(2\sqrt{3}\right), g\left(2+\sqrt{3}\right)$ et $g(-1,2)$.

b. Soit $N(x) = 4f(x) - 12g(x)$.
Réduire et ordonner cette expression $N(x)$, puis la factoriser.

2. Soit H la fonction rationnelle

$$\begin{array}{rccl} H: & \mathbf{R} & \rightarrow & \mathbf{R}, \\ & x & \longmapsto & H(x) = \dfrac{4(2x-5)^2}{(5x+2)^2 - (x+12)^2} \end{array}$$

a. Factoriser $(5x+2)^2 - (x+12)^2$.

b. Déterminer l'ensemble de définition, $\mathcal{D}_H$, de H.

c. Trouver $H'(x)$ l'expression simplifiée, de $H(x)$.
Déterminer l'ensemble de définition, $\mathcal{D}_{H'}$, de H'.

d. Résoudre les équations suivantes :

$$x \in \mathcal{D}_H \; H(x) = -1, : \; x \in \mathcal{D}_H : \; H(x) = 0.$$

GÉOMÉTRIE

Partie A

Dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère les points A, B et M de coordonnées respectives :

$$\text{A}(-4\,;\,6), \quad \text{B}(4\,;\,2) \quad \text{et} \quad \text{M}(x\,;\,0),\ (x \in \mathbf{R}).$$

Notations : $d(\text{A}, \text{B}) = \text{AB}$.
I est le point tel que $\overrightarrow{\text{OI}} = \vec{\imath}$;
H est l'image de A par la projection orthogonale sur la droite (OI).

1. Déterminer x pour que le triangle (ABM) soit rectangle en M.

2. On désigne par M′et M″ les points de coordonnées respectives $(2\,;\,0)$ et $(-2\,;\,0)$.

a. Calculer les coordonnées du point C image de B dans la symétrie orthogonale d'axe $(\text{M}'\text{M}'')$.

b. Trouver les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\text{AC}}$ et $\overrightarrow{\text{AM}'}$.

Vérifier qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{\text{AM}'} = k\overrightarrow{\text{AC}}$.

Que peut-on en conclure pour les points A, M$'$ et C ?

3. Vérifier que

$$d(\text{A, M'}) + d(\text{M}', \text{B}) \leqslant d(\text{A}, \text{M}'') + d(\text{M"}, \text{B}).$$

Partie B

1. Calculer la tangente de l'écart angulaire de l'angle géométrique $\widehat{\text{AM"H}}$.

2. En déduire une valeur approchée par défaut de la mesure en grades de $\widehat{\text{AM"H}}$.