∾ Brevet Rouen juin 1980 ∾

ALGÈBRE

Soit f et g les fonctions polynômes suivantes définies par

$$\begin{array}{llcl} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = 15\left(4x^2 - 3x\right) \\ g : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & g(x) = 16x^2 + 9 - 24x. & \end{array}$$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations

$$f(x) = 0, \qquad g(x) = 1.$$

2. Les fonctions f et g sont-elles des applications bijectives ? Expliquer.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = g(x)$.
4. Soit h la fonction rationnelle définie par

$$\begin{array}{llcl} h : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & h(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}. \end{array}$$

   Quel est l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de h ?
5. Montrer que pour tout élément x de $\mathscr{D}$, $h(x)$ se met sous la forme simplifiée $\dfrac{4x-3}{15x}$.
   Calculer $h(2)$, $h\left(-\dfrac{1}{5}\right)$.
6. Calculer $h\left(\sqrt{3} - 1\right)$.
   On donnera une valeur exacte avec dénominateur rationnel, puis une valeur approchée par défaut à 10^p près (p minimal) sachant que

$$1,732 < \sqrt{3} < 1,733.$$

7. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $h(x) = 0$.

GÉOMÉTRIE

Dans un plan euclidien muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère les points :

$$\text{A}(2\,;\,6), \quad \text{B}(4\,;\,10), \quad \text{C}(12\,;\,6).$$

1. Faire une figure (on prendra pour unité le centimètre). Cette figure sera complétée au cours du problème.
2. **a.** Trouver les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}$.
   b. Trouver les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\text{BC}}$.

  c. En déduire que (A, B, C) est un triangle rectangle en B.

3. Trouver les coordonnées du centre I du cercle $\mathcal{C}$ passant par les points A, B et C.

4. Trouver la valeur du rayon R de $\mathcal{C}$.

5. Trouver les coordonnées du point D tel que (A, B, C, D) soit un parallélogramme. Préciser la nature de (A, B, C, D).

6. Placer les points $\mathrm{B}'(4\,;\,2)$ et $\mathrm{D}'(10\,;\,10)$.

  a. Montrer que B′ est le symétrique de B par rapport à la droite (AC).

  b. Montrer que D′ est le symétrique de D par rapport à la droite (AC).

  c. Quelle est la nature du quadrilatère (A, B′, C, D′) ? Pourquoi ?