Brevet Strasbourg juin 1979

Algèbre

Partie I

1. Soit f la fonction polynôme définie, dans $\mathbb{R}$, par

$$f(x) = 2(2x-1)^2 + (4x-2)(x-1) - 2\left(4x^2-1\right).$$

   a. Factoriser $f(x)$.

   b. Développer, réduire et ordonner $f(x)$.

   c. Calculer $f\left(\dfrac{3}{4}\right)$.

2. Soit g la fonction polynôme définie par

$$g(x) = (2x-1)(x-3).$$

   a. Comparer $f(x)$ et $g(x)$.

   b. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $g(x) = 0$.

   c. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $2x - 1 \geqslant 0$.

3. h est la fonction rationnelle définie par

$$h(x) = \frac{x-3}{g(x)}.$$

   a. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de la fonction h.

   b. Simplifier $h(x)$ dans $\mathcal{D}$ puis calculer $h\left(\sqrt{3}\right)$ (on donnera ce résultat sous la forme d'un rapport dont le dénominateur est rationnel).

   c. Sachant que $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$, donner un encadrement de $11h\left(\sqrt{3}\right)$ à 10^{-2} près.

Géométrie

Dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère les points A, B et M de coordonnées

$$\text{A}(4\,;0), \qquad \text{B}(-2\,;\,0) \quad \text{et} \quad \text{M}(1\,;3).$$

1. Calculer les distances $d(\text{M, A})$, $d(\text{M, B})$ et $d(\text{A, B})$.
   En déduire que le triangle (A, M, B) est isocèle et rectangle.
2. Soit F la projection du point O sur la droite (BM) suivant la direction (AM).
   Calculer la distance $d(\text{B, F})$ (on pourra par exemple utiliser la propriété de Thalès).
   Démontrer que le triangle (B, F, O) est un triangle rectangle et isocèle.

3. Soit C le milieu de (O, M).
   Calculer les coordonnées du point C.
4. Le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [OM], de centre C coupe la droite (AM) en M et en E.
   Démontrer que le point F est un point du cercle $\mathscr{C}$.
   Quelle est la nature du quadrilatère (O, F, M, E) ?
5. Calculer le sinus de l'écart angulaire de l'angle géométrique $\widehat{\text{FMO}}$.