

∞ Brevet des collèges Sud Viet–Nam juin 1974 ∞

ALGÈBRE

Soit f et g deux applications de \mathbf{R} dans \mathbf{R} définies par

$$x \mapsto f(x) = -4x + 5 \quad \text{et} \quad x \mapsto g(x) = x^2 - 1.$$

1.
 - a. Calculer $f(2)$, $f(-2)$, $g(2)$ et $g(-2)$.
 - b. L'application g est-elle une bijection?
 - c. Montrer que le nombre réel $\sqrt{10} - 2$ a même image par f et par g .
 - d. Résoudre $f(x) = 8$ et $g(x) = 8$.
2. Soit

$$A(x) = 16x^2 - 40x + 24 \quad \text{et} \quad B(x) = -4x^2 + 9.$$

- a. Montrer que $A(x) = (g \circ f)(x)$ et que

$$A(x) = 8(1 - x)(3 - 2x).$$

- b. Montrer que $B(x) = (f \circ g)(x)$ et mettre $B(x)$ sous forme d'un produit de facteurs du premier degré.
- c. Simplifier la fraction rationnelle $F(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$; soit $F'(x)$ le résultat obtenu.
- d. Pour quelle valeur de x a-t-on $F'(x) = 1$?
- e. En déduire l'ensemble A des réels tels que

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x).$$

GÉOMÉTRIE

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on a les points

$$A(-2; 1), \quad B(2; 2) \quad \text{et} \quad C(8; -4).$$

1. Montrer que les points A, O et C sont alignés.
2. Calculer les coordonnées du point D pour que (A, B, C, D) soit un parallélogramme.
3. Écrire une équation de la droite (AC).
Le point I(4; -2) est-il élément de cette droite?
4. Soit E le symétrique de O par rapport au point B.
Quelles sont les coordonnées de E?
5. Calculer les normes suivantes :

$$\|\vec{OC}\|, \quad \|\vec{AE}\|, \quad \|\vec{EC}\|, \quad \|\vec{AC}\|.$$

En déduire la nature du triangle (A, E, C) et celle de (C, O, E).

[On rappelle que $\|\vec{OC}\| = d(A, B)$.]