Brevet des collèges Syrie juin 1963

ENSEIGNEMENT LONG ET ENSEIGNEMENT COURT

ALGÈBRE

I

1. Mettre les expressions suivantes sous la forme de produits de facteurs du premier degré en x :

$$\begin{aligned}A(x) &= (2x+3)(5x-7)+(2x+3)^2-(2x+3)(x-1);\\ B(x) &= (5x+2)^2-(3x-6)^2.\end{aligned}$$

2. Peut-on simplifier la fraction $\dfrac{A(x)}{B(x)}$?
3. Résoudre l'équation $\dfrac{A(x)}{B(x)} = \dfrac{1}{2}$.

II

Représenter graphiquement par rapport à un même système d'axes de coordonnées les fonctions suivantes :

$$y = 2x-7 \qquad \text{et} \qquad y = -3x+3.$$

Les deux courbes obtenues se coupent en un point, P, dont on calculera les coordonnées.
Déterminer l'équation de la droite (OP), joignant le point P à l'origine des axes.

GÉOMÉTRIE

On donne un angle $x\mathrm{O}y$, deux droites (D) et (D') qui passent par O et sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle $x\mathrm{O}y$, un point A sur (D), un point A$'$, sur (D').
Soient P et P$'$ les projections orthogonales de A et A$'$ sur Ox, Q et Q$'$ les projections orthogonales de A et A$'$ sur Oy.

1. Démontrer que les triangles OAP et OAQ sont respectivement semblables aux triangle OA$'$Q$'$ et OA$'$P$'$.
   En déduire la relation
   $$\mathrm{OP} \times \mathrm{OP}' = \mathrm{OQ} \times \mathrm{OQ}'.$$
2. Démontrer que les triangles OPQ et OP$'$Q$'$ sont semblables.
   Démontrer que les quatre points P, Q, P$'$, Q$'$ sont sur un même cercle.
3. Démontrer que les triangles APQ et A$'$P$'$Q$'$ sont semblables.

4. La droite AA$'$ coupe Ox et Oy respectivement en M et N.
Comparer les triangles NA$'$Q$'$ et NAQ, puis les triangles APM et A$'$P$'$M.
En déduire la relation

$$\frac{\text{AM} \times \text{AN}}{\text{A}'\text{M} \times \text{A}'\text{N}} = \left(\frac{\text{OA}}{\text{OA}'}\right)^2.$$