∽ Brevet Thaïlande–Viet-Nam juin 1979 ∾

Algèbre

On considère les applications f et g définies dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\begin{aligned} f(x) &= 3(x-2)^2-4+x^2-(x+5)(2-x),\\ g(x) &= (3x-1)^2-(2x+1)^2. \end{aligned}$$

1. **a.** Développer, réduire et ordonner $f(x)$.

b. En utilisant ce développement, calculer $f\left(-\dfrac{2}{3}\right)$, $f\left(-\dfrac{1}{5}\right)$ et $f\left(\sqrt{2}+2\right)$.

2. **a.** Écrire $f(x)$ et $g(x)$ sous la forme de produits de facteurs du premier degré.

b. Trouver les antécédents par g de 0.

c. En déduire que l'application g n'est pas bijective.

3. Soit h la fonction rationnelle, de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, définie par

$$h(x)=\frac{(x-2)(5x+1)}{5x(x-2)}.$$

a. Déterminer son ensemble de définition.

b. Simplifier $h(x)$.

c. Résoudre, dans R, les équations

$$h(x)=0 \quad \text{et} \quad h(x)=1.$$

4. Dans un plan muni d'un repère cartésien $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$, construire les droites d'équations

$$y=5x+1 \quad \text{et} \quad y=5x.$$

Quel résultat précédent peut être vérifié graphiquement ? Justifier.

Géométrie

Dans un plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ on considère les points suivants définis par leurs coordonnées :

$$\text{A}(-2\,;\,2),\qquad \text{B}(-3\,;\,2),\qquad \text{C}(6\,;\,0)\quad \text{et}\quad \text{D}(0\,;\,10).$$

1. Placer les points A, B, C et D.

2. Calculer les coordonnées (ou composantes) des vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$, $\overrightarrow{\text{AC}}$, $\overrightarrow{\text{AD}}$ et $\overrightarrow{\text{BC}}$.

3. Prouver qu'il existe un réel k qu'on déterminera tel que $\overrightarrow{\text{AB}}=k\overrightarrow{\text{AD}}$.
Que peut-on en déduire pour les points A, B et D ?

4. Calculer $d(\text{A, B})$, $d(\text{A, C})$, $d(\text{B, C})$ et $d(\text{A, D})$.
Quelle est la nature des triangles (A, B, C) et (A, C, D) ?

5. Soit $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle (A, C, D).
Déterminer les coordonnées de son centre I.
Calculer son rayon ; le point O est-il situé sur $\mathscr{C}$?

6. On désigne par t l'écart angulaire de l'angle géométrique $\widehat{\text{ABC}}$.
Calculer $\tan t$. En déduire la valeur approchée en degrés de t à un degré près par défaut.